第八章 立体几何初步

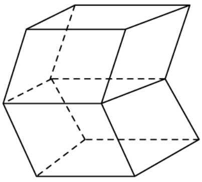
8.1 基本立体图形

课时 1 棱柱、棱锥和棱台

对点上分

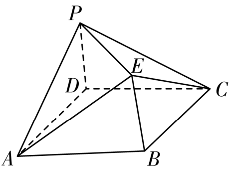
1. B 【解析】A 中几何体没有互相平行的面，不是棱柱；C 中几何体虽然有两个面互相平行，但是侧棱不平行，不是棱柱；D 中几何体有一个底面，侧面有一个公共顶点，不是棱柱，是棱锥. **故 B 正确.**

2. B 【解析】底面和侧面的公共边不是侧棱，A **错误**；根据棱柱的特征知，棱柱的两个底面一定是全等的，故棱柱中至少有两个面的形状完全相同，B **正确**；正六棱柱的两个相对侧面互相平行，C **错误**；有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形并不能保证其对应几何体是棱柱，如图所示的几何体就不是棱柱，D **错误. 故选 B.**

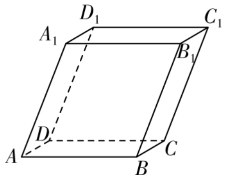


易错警示 遗漏棱柱的特征导致判断出错

有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的多面体不一定是棱柱，如上图，棱柱还需要满足各侧棱互相平行且相等. 判断时不要遗漏任何一个特征. 类似地，有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体不一定是棱锥，如图. 此外，棱柱有两个互相平行的面，并不表明只有两个面互相平行，如长方体，有三组对面互相平行，其中任意一组对面都可以作为底面.

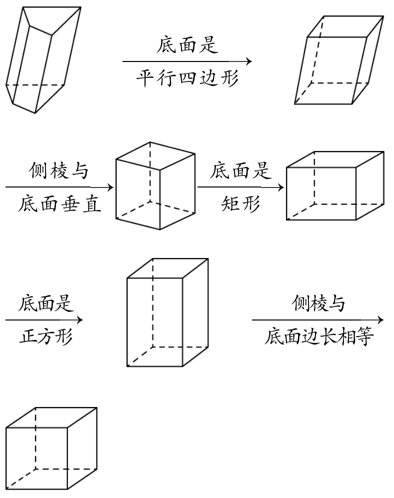


3. BD　【解析】如图所示是一个斜四棱柱.

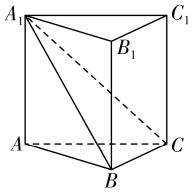


它的底面 $ABCD$ 是矩形,**故 A 错误**;侧面 ADD_1A_1 是矩形,**故 C 错误**;由直棱柱定义可知,**B 正确**;因为相邻两个侧面是矩形,且棱柱中任意相邻两个四边形的公共边都互相平行,所以棱柱各侧面都是矩形,则该棱柱一定是直棱柱,**故 D 正确. 故选 BD.**

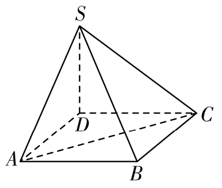
归纳总结　几种四棱柱间的转化关系



4. AB　【解析】因为棱台是由平行于棱锥底面的平面截得的,所以棱台侧面都是梯形,**故 A 正确**;



图①



图②

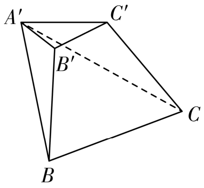
棱柱被平面分成的两部分可以都是棱锥,如图①,三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 被 $\triangle A_1BC$ 所在平面分为两个棱锥 A_1-ABC 和 $A_1-BCC_1B_1$,**故 B 正确**;

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面和截面之间的部分组成的几何体才是棱台,**故 C 错误**;

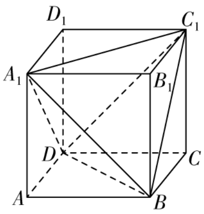
棱锥被平面分成的两部分可以都是棱

锥，如图②，四棱锥 $S-ABCD$ 被 $\triangle SAC$ 所在平面分成两个三棱锥 $S-ACD$ 和 $S-ABC$，**故 D 错误. 故选 AB.**

5. B 【解析】如图所示，三棱台 $A'B'C'-ABC$ 沿 $\triangle A'BC$ 截去三棱锥 $A'-ABC$，剩余部分是四棱锥 $A'-BCC'B'$. **故 B 正确.**



6. C 【解析】如图，以正方体顶点 A 为顶点、正方体的棱为侧棱的三棱锥 $A-A_1BD$ 为正三棱锥，符合题意，此类三棱锥共有 8 个. 此外，以正方体顶点为顶点、面对角线为侧棱的三棱锥 A_1-BC_1D，$A-B_1CD_1$（图略）为正三棱锥，此类三棱锥共有 2 个. 其余情况均不符合题意，所以符合条件的正三棱锥的个数为 8+2=10. **故 C 正确.**



7. A

攻略上分 根据题干中"M,N 分别是 PA,PB 上的动点，则 $\triangle CMN$ 的周长的最小值"信息，可知其属于通法攻略 21 几何体的展开图与最短路径问题，所以可以将正三棱锥沿 PC 展开，转化为平面问题，通过两点之间线段最短，再结合余弦定理即可求解.

【解析】如图，把正三棱锥 $P-ABC$ 沿 PC 展开，可得三个全等的等腰三角形，分别是 $\triangle PBC'$，$\triangle PAC$，$\triangle PAB$，

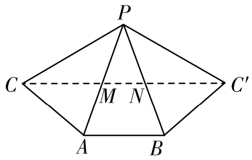
则 $\angle CPA=\angle BPC'=\angle APB=40°$，$\angle CPC'=120°$.

连接 CC'，交 PB 于点 N，交 PA 于点 M，则线段 CC' 的长就是 $\triangle CMN$ 的最小周长，

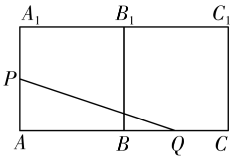
又 $PC=PC'=PA=2\sqrt{2}$，

所以根据余弦定理可得，$CC'=\sqrt{8+8-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{6}$. **故**

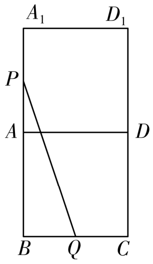
选 A.



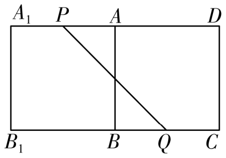
8. D 【解析】①按照下列方式展开，$PQ=\sqrt{1^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$；



②按照下列方式展开，$PQ=\sqrt{1^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$；



③按照下列方式展开，$PQ=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.



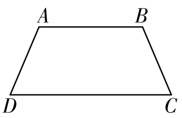
综上所述，最短路径为 $2\sqrt{2}$. **故选** D.

9. 前　程 【解析】通过还原几何体，可知两个正方形是几何体的底面，则与“祝”字相对的字是“前”；四个梯形是几何体的侧面，“不相邻”就是“相对”的，即与“你”字相对的字为“程”.

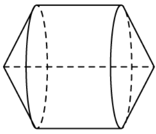
课时 2　圆柱、圆锥、圆台和球

对点上分

1. D 【解析】图①是一个等腰梯形，CD 为较长的底边，以 CD 边所在直线为旋转轴旋转一周所得几何体为一个组合体，如图②，包括一个圆柱、两个圆锥，**故** D **正确**.



图①



图②

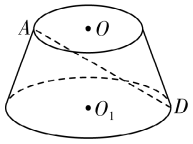
2. CD　【解析】因为圆锥过顶点的截面所得三角形的两边是圆锥的母线，且圆锥的母线长度相等，所以圆锥过顶点的截面是等腰三角形，**故 A 正确**；

根据球的定义可知 B **正确**；

圆柱的母线与它的轴平行，**故 C 错误**；

如图，在圆台 OO_1 的上底面的圆周上取点 A，在下底面的圆周上取点 D，连接 AD，则 AD 不是圆台的母线，所以在圆台的上、下底面的圆周上各取一点，这两点的连线不一定是圆台的母线，**故 D 错误**.

故选 CD.



关键点拨　简单旋转体的结构特征要抓住两个关键点：(1)明确由哪个平面图形旋转而成；(2)明确旋转轴是哪条直线.

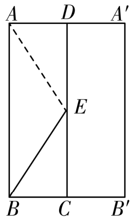
3. C　【解析】设圆台的上底面半径为 r cm，下底面半径为 R cm，母线长为 l cm，高为 h cm，由题意可得 $\begin{cases} 2\pi r=\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times 2, \\ 2\pi R=\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times 4, \\ l=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} r=1, \\ R=2, \\ l=2, \end{cases}$ 所以该圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=\sqrt{3}$(cm). **故 C 正确.**

4. C

攻略上分　由题干中"曲线 BE 的长度等于在圆柱 O_1O_2 的侧面上点 B 到点 E 的最短距离"可知本题主要考查的是通法攻略 21 几何体的展开图与最短路径问题，通过将圆柱的侧面展开，从而将其转化为平面问题来解决.

【解析】如图所示，将圆柱 O_1O_2 的侧面展开，连接 AE，则 $BC=2$，$CE=DE=3$，从而 $AE=BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=$

$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.



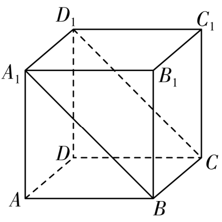
在△AEB中，由余弦定理可得$\cos\angle AEB=\dfrac{AE^2+BE^2-AB^2}{2AE\cdot BE}=\dfrac{13+13-36}{2\times13}=-\dfrac{5}{13}<0$，所以∠$AEB$为钝角，故点$A$到点$P$的距离的最小值为$AE=\sqrt{13}$. **故选** C.

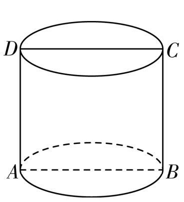
5. B　【解析】设底面积较小的圆锥A的底面半径为r_1，母线长为l_1，底面积较大的圆锥B的底面半径为r_2，母线长为l_2. 依题意可得$\pi r_1^2=\dfrac{\pi}{4}$，$\pi r_2^2=4\pi$，解得$r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=2$，所以$\dfrac{2\pi r_1}{l_1}+\dfrac{2\pi r_2}{l_2}=\dfrac{\pi}{l_1}+\dfrac{4\pi}{l_2}=2\pi$，$\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{4}{l_2}=2$，所以$l_1+l_2=\dfrac{1}{2}(l_1+l_2)\left(\dfrac{1}{l_1}+\dfrac{4}{l_2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(5+\dfrac{l_2}{l_1}+\dfrac{4l_1}{l_2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\dfrac{l_2}{l_1}\cdot\dfrac{4l_1}{l_2}}\right)=\dfrac{9}{2}$，当且仅当$\dfrac{l_2}{l_1}=\dfrac{4l_1}{l_2}$，即$l_1=\dfrac{3}{2}$，$l_2=3$时等号成立. **故B正确.**

6. BCD

攻略上分　本题是与几何体的截面相关的问题，可通过学习大招攻略25，了解不同几何体的截面情况，帮助理解.

【解析】用一个平面去截圆锥得到的截面可能为三角形、圆等，不可能出现矩形；用一个平行于底面的平面去截正四棱锥得到的截面为正方形（也是矩形）；用一个平面去截圆柱、正方体，截面的形状都有可能是矩形. **故选** BCD.





7. D 【解析】令球心到较近的截面距离为 h，则到另一个截面距离为 $h+1$，且球的半径为 R. 易知较近的截面圆面积为 8π，另一个截面圆面积为 5π，所以较近的截面圆半径 $r_1=2\sqrt{2}$，另一个截面圆半径 $r_2=\sqrt{5}$，由截面圆半径、球的半径和球心与截面距离关系知 $R^2-r_2^2-(R^2-r_1^2)=(h+1)^2-h^2$，所以 $r_1^2-r_2^2=2h+1=3$，则 $h=1$，故 $R^2=h^2+r_1^2=9$，则 $R=3$，则球的直径为 6. **故 D 正确.**

8. B

思路导引 先根据余弦定理计算圆锥的轴截面三角形顶角的余弦值，判断出其为钝角，再根据三角形的面积公式可知，当截面三角形顶角为直角时截面面积最大.

【解析】如图，VA，VB，VC 为母线，O 为底面圆心，其中△VAB 为轴截面三角形，

则 $OB=2\sqrt{2}$，$VO=2$，则 $VB=\sqrt{VO^2+OB^2}=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$，

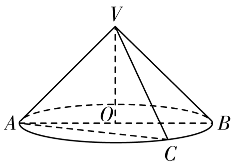
则在 △VAB 中利用余弦定理可得，

$\cos\angle BVA=\dfrac{VA^2+VB^2-AB^2}{2VA\cdot VB}=\dfrac{12+12-32}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}<0$，则 $\angle BVA$ 为钝角.

设过圆锥任意两条母线所作的截面三角形 VAC 的顶角 $\angle AVC=\alpha$，则 $0<\alpha\leqslant\angle BVA$，

则截面三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot VA\cdot VC\cdot\sin\alpha=6\sin\alpha$，

则当 $\sin\alpha=1$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，截面三角形的面积最大，最大值为 6. **故选 B.**



课时 3　简单组合体

对点上分

1. A 【解析】此几何体上面是一个圆锥，下面是一个圆台，所以可由 A 中的平面图形

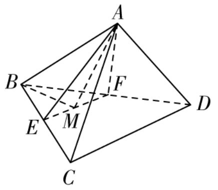
旋转形成. **故 A 正确.**

方法总结 已知组合体寻找形成它的平面图形问题，首先分析该组合体是由哪些简单几何体组合而成的，然后据此找到对应的平面图形及旋转轴；对于不规则的平面图形绕轴旋转问题，首先确定旋转轴并对原平面图形作适当分割，一般分割成矩形、三角形、梯形、圆等基本图形，再结合旋转体的形成过程进行分析.

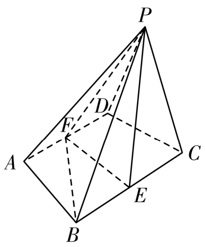
2. D 【解析】由题图可看出该几何体是由两个同底的四棱锥组成的，其棱为 MA，MB，MC，MD，AB，BC，CD，DA，NA，NB，NC 和 ND，共 12 条；顶点是 M，A，B，C，D 和 N，共 6 个；有面 MAB、面 MBC、面 MCD、面 MDA、面 NAB、面 NBC、面 NCD 和面 NDA，共 8 个，且每个面都是三角形. **故 A，B，C 说法正确，D 说法不正确.**

二级结论 多面体欧拉定理：三维空间中的简单多面体的顶点数 V+面数 F−棱数 $E=2$.

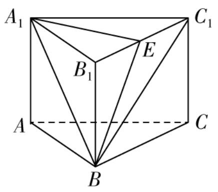
3. D 【解析】如图①，在三棱锥 $A-BCD$ 中，E，F，M 分别是 BC，BD，EF 的中点，则三棱锥 $A-BCD$ 可分割成三棱锥 $A-BEM$，$A-BFM$ 和四棱锥 $A-CDFE$，**A 有可能；**



图①



图②



图③

如图②，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 的中点，则四棱锥 $P-ABCD$ 可

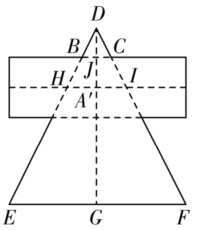
分割成三棱锥 $P-ABF$, $P-BEF$ 和四棱锥 $P-CDFE$, B **有可能**;

如图③,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E 为 B_1C_1 的中点,则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可分割为三棱锥 B_1-A_1BE, C_1-A_1BE 和四棱锥 $B-ACC_1A_1$, C **有可能**;

一个四棱柱割去一个四棱锥后的几何体不可能由两个三棱锥拼成, D **不可能**.

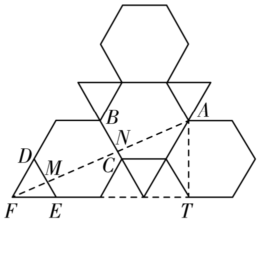
4. AD 【解析】当平面经过圆柱上、下底面的圆心时,圆锥的截面为三角形除去一条边,**故** A **正确**;当平面不经过圆柱上、下底面的圆心时,圆锥的截面为一条曲线,**故** D **正确**. **故选** AD.

5. C 【解析】过点 B, C 作垂直于正四棱锥底面的截面,过点 D 作 $DG\perp EF$,交 EF 于点 G,交 BC 于点 J,设 A'为 A 在截面上的投影,过点 A'作 $HI//EF$,交 DE 于点 H,交 DF 于点 I,如图所示.



由题意可得 $DE=3\sqrt{10}$,因为正四棱锥的底面边长为 6,所以 $EF=6\sqrt{2}$, $DG=\sqrt{DE^2-EG^2}=6\sqrt{2}$, HI 的长度为正四棱柱底面正方形对角线的长度,即 $HI=4$, $JA'=2$. 因为 $\frac{HA'}{EG}=\frac{DA'}{DG}$,所以 $DA'=4$, $DJ=2$. 因为 $\frac{BJ}{HA'}=\frac{DJ}{DA'}$,所以 $BJ=1$, $BC=2$. **故** C **正确**.

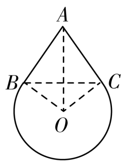
6. D 【解析】如图所示,将该半正多面体表面展开,且 A, F 在线段 DE, BC 两侧(两线段在两点之间). 过点 A 作 AT 垂直 FE 的延长线于点 T,连接 AF.



由半正多面体的棱长为2，得 $FT=8$，$AT=2\sqrt{3}$，又 $AT\perp FT$，故 $AF=\sqrt{FT^2+AT^2}=2\sqrt{19}$，所以 $FM+MN+AN\geqslant AF=2\sqrt{19}$，当且仅当在展开图中 A,N,M,F 共线时等号成立．**故 D 正确.**

名师点拨 空间图形求表面上折线段之和最小值时，关键是弄清几何体中的有关点、线在展开图中的相应位置关系，解决的方法就是把几何体各侧面展开铺在平面上，根据"两点之间线段最短"来解决.

7. D 【解析】设优弧 BC 所在圆的圆心为 O，半径为 R，连接 OA，OB，OC，如图所示.



易知"水滴"的"竖直高度"为 $OA+R$，"水平宽度"为 $2R$，由题意知 $\dfrac{OA+R}{2R}=\dfrac{4}{3}$，解得 $OA=\dfrac{5}{3}R$. 因为 AB 与圆弧相切于点 B，所以 $OB\perp AB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$\sin\angle BAO=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{R}{\frac{5}{3}R}=\dfrac{3}{5}$. 又 $\angle BAO\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle BAO=\sqrt{1-\sin^2\angle BAO}=\dfrac{4}{5}$. 由对称性知，$\angle BAO=\angle CAO$，则 $\angle BAC=2\angle BAO$，所以 $\sin\angle BAC=2\sin\angle BAO\cdot\cos\angle BAO=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$. **故 D 正确.**

8.1 节测上分

1. B 【解析】圆及其内部绕直径所在直线旋转半周后所得几何体为球，而正方形及其内部绕一边的垂直平分线旋转半周后所得几何体为圆柱，故题设中的平面图形绕旋转轴旋转半周形成的几何体为一个球挖去一个圆柱，**故 B 正确.**

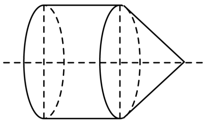
2. C 【解析】只有在平面平行于圆锥底面时，才能将圆锥截为一个圆锥和一个圆

台，当平面不平行于圆锥底面时，得到的几何体并非圆锥和圆台，**故 A 错误**；

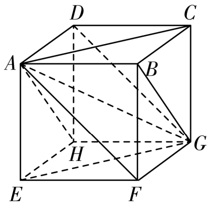
棱柱的侧棱都相等且平行，且侧面是平行四边形，但其底面多边形各边不一定相等，则侧面并不一定全等，**故 B 错误**；

圆锥的顶点、底面圆的圆心与圆锥底面圆周上任意一点的连线都可以构成直角三角形，**故 C 正确**；

直角梯形绕下底所在直线旋转一周，所形成的几何体是由一个圆柱与一个圆锥组成的简单组合体，如图所示，**故 D 错误**.



3. C 【解析】在正方体 $ABCD-EFGH$ 中，当顶点为 A 时，三棱锥 $A-EHG$，$A-EFG$，$A-DCG$，$A-DHG$，$A-BCG$，$A-BFG$ 均为“鳖臑”. 所以 8 个顶点共可以形成 $8\times6=48$（个），但每个“鳖臑”都重复一次，所以“鳖臑”的个数为 $\frac{48}{2}=24$. **故 C 正确.**

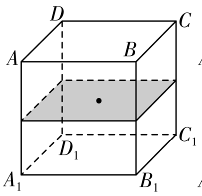


4. A 【解析】因为正方体容器中盛有容积的一半的有色溶液，所以无论怎样转动，其液面总是过正方体的中心.

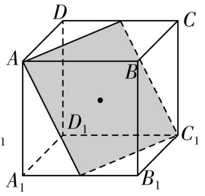
对于 B，当过正方体一面上相对的两边的中点以及正方体的中心作截面时，得截面形状为正方形，即静止时液面如图①，**故 B 正确**；

对于 C，当过正方体一面上一边的中点和此边外的顶点以及正方体的中心作截面时，得截面形状为菱形，即静止时液面如图②，**故 C 正确**；

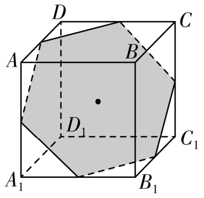
对于 D，当过正方体一面上相邻两边的中点以及正方体的中心作截面时，得截面形状为正六边形，即静止时液面如图③，**故 D 正确. 故选 A.**



图①

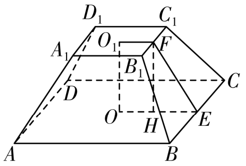


图②

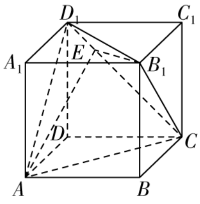


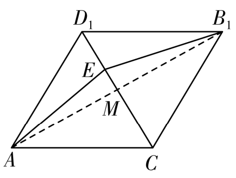
图③

5. A 【解析】如图所示，设该正四棱台为 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$，上、下底面中心分别为 O_1,O，分别取 BC,B_1C_1 的中点 E,F，连接 OO_1,O_1F,OE,EF，在四边形 OO_1FE 内，作 $FH\perp OE$ 交 OE 于 H，则四边形 OO_1FH 是矩形，且 $FH=OO_1=9$，$OE=\frac{1}{2}AB=17.25$，$O_1F=OH=\frac{1}{2}A_1B_1=16$，所以 $EH=OE-OH=1.25=\frac{5}{4}$. 在 $\text{Rt}\triangle FHE$ 中，$EF=\sqrt{FH^2+EH^2}=\sqrt{9^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{1\ 321}}{4}\approx\frac{36.35}{4}\approx 9.1$，即该墩台的斜高约为 9.1 m. **故 A 正确.**

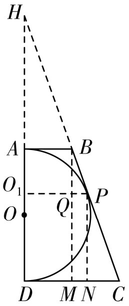


6. C 【解析】如图，连接 AC,AD_1,B_1D_1,B_1C，将 $\triangle ACD_1$ 和 $\triangle B_1CD_1$ 展开到同一平面，连接 AB_1 交 CD_1 于点 M，则 $AE+B_1E\geqslant AB_1$. 因为 $AB=4$，所以 $AC=B_1C=AD_1=CD_1=B_1D_1=4\sqrt{2}$，所以四边形 ACB_1D_1 为菱形，$\angle ACD_1=\angle D_1CB_1=60°$，则 $AB_1=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=4\sqrt{6}$，**故 C 正确.**





7. B 【解析】圆台上、下底面半径分别为 $r_1=1$, $r_2=2$，设母线长为 l，高为 h，球 O 的直径为 h. 因为 BC 与半圆 O 相切于点 P，则 $BP=r_1=1$, $CP=r_2=2$，所以 $l=BP+CP=3$，①**正确**；过 B 作 $BM\perp CD$ 于 M，则 $BM=h$, $CM=r_2-r_1=1$，所以 $h=\sqrt{l^2-CM^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，即球 O 的半径为 $\sqrt{2}$，②**正确**；延长 DA, CB 交于 H，因为 $AB/\!/CD$，所以 $\frac{HA}{HD}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$，则 $HD=2HA=2AD=2h=4\sqrt{2}$，③**错误**；过 P 作 $PQ\perp BM$ 于 Q，延长 PQ 与 AD 交于 O_1，则 P 的轨迹是以 O_1 为圆心，O_1P 为半径的圆，作 $PN\perp CD$ 于 N，得 $\triangle BQP\backsim\triangle PNC$，则 $\frac{BP}{PC}=\frac{QP}{NC}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{O_1P-1}{2-DN}=\frac{O_1P-1}{2-O_1P}$，得 $O_1P=\frac{4}{3}$，所以点 P 轨迹的长度是 $2\pi\times\frac{4}{3}=\frac{8\pi}{3}$，④**错误. 故 B 正确.**



8. $-\frac{1}{4}$ 【解析】由已知得 $BD=\sqrt{2}AB=\sqrt{6}$, $BC=2$. 因为 D, E, F 三点重合，所以 $AE=AD=\sqrt{3}$, $BF=BD=\sqrt{6}$，则在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理可得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE=1+3-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，所以 $CE=CF=1$. 则在 $\triangle BCF$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle FCB=\frac{BC^2+CF^2-BF^2}{2BC\cdot CF}=\frac{4+1-6}{2\times2\times1}=-\frac{1}{4}$.

8.2 立体图形的直观图

对点上分

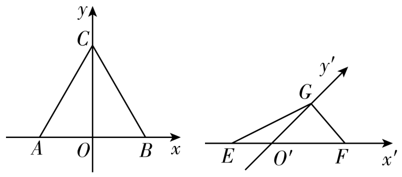
1. A 【解析】由斜二测画法知，平行于 x 轴或与 x 轴重合的线段长度不变，平行关系不变，平行于 y 轴或与 y 轴重合的线段长度减半，平行关系不变，**故 A 正确.**

2. C 【解析】利用斜二测画法画直观图时，平行于 x 轴或与 x 轴重合的线段长度

不变，则 CD，PQ 长度不变，平行于 y 轴或与 y 轴重合的线段长度减半，则 OA 长度减掉一半，线段 PB，PC，QE，QD 对应线段长度也会减小. 所以 P，C，D，Q 的对应点 P'，C'，D'，Q'画对了，A，B，E 的对应点 A'，B'，E'画错了. **故 C 正确.**

归纳总结 斜二测画法中，"斜"是指把直角坐标系 Oxy 变成斜坐标系 $O'x'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$（或 135°）；"二测"是指画直观图时，平行（或重合）于 x 轴的线段长度不变，平行（或重合）于 y 轴的线段长度减半.

3. B 【解析】对于 B，由于直角在直观图中有的成为 45°，有的成为 135°，但直观图的平行关系依然保留，**故 B 正确**；对于 C，梯形的直观图中平行关系一定保留，一定是梯形，**故 C 错误**；对于 A，D，如图①所示的等边三角形 ABC 中，O 为 AB 的中点，设 $AB=4$，则 $CO=2\sqrt{3}$，在其对应的如图②所示的直观图中，$EF=4$，$O'G=\sqrt{3}$，故 $FG=\sqrt{7-2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}-1$，$EG=\sqrt{7+2\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}+1$，则 $\triangle EFG$ 不为等腰三角形，**故 A，D 错误.**



图①　　图②

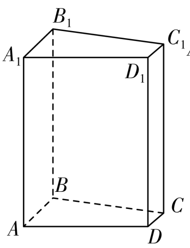
4. C 【解析】由比例可知，所画长方体的长、宽、高和四棱锥的高分别为 4 cm，1 cm，2 cm 和 1.6 cm. 又因为斜二测画法画直观图时，已知图形中平行（或重合）于 x 轴的线段，在直观图中平行（或重合）于 x'轴，长度保持不变；已知图形中平行（或重合）于 y 轴的线段，在直观图中平行（或重合）于 y'轴，长度变为原来的一半；已知图形中平行（或重合）于 z 轴的线段，在直观图中平行（或重合）于 z'轴，长度保持不变，所以该建筑物按

1∶500 的比例画出它的直观图的相应尺寸分别为 4 cm,0.5 cm,2 cm 和 1.6 cm.

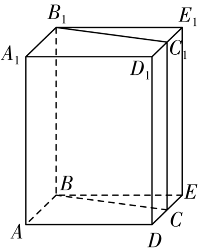
故 C 正确.

5.【解】(1)结合直观图的画法,即可得到四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的直观图如图①(答案不唯一).

(2)由题意并结合长方体的几何特征,可得补成的长方体如图②,即补上的几何体是三棱柱 $B_1C_1E_1-BCE$(答案不唯一).



图①



图②

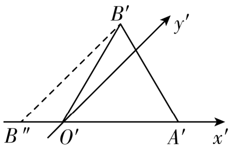
规律总结 (1)利用斜二测画法画空间几何体直观图的规则口诀:平行依旧垂改斜,横等纵半竖不变,眼见为实遮为虚,空间观感好体现.

(2)画空间几何体的直观图时,为增强立体感,被挡住的部分通常用虚线表示.

6. A

攻略上分 本题已知直观图,需先还原平面图形再计算,也可利用大招攻略 22 中的距离关系速解.

【解析】过点 B' 作 $B'B''/\!/y'$ 轴交 x' 轴于点 B'',如图所示.

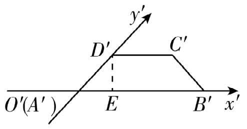


在 $\triangle B'B''O'$ 中,$O'B'=2$,$\angle B'B''O'=45°$,$\angle B'O'B''=120°$,由正弦定理可得,$\dfrac{B'B''}{\sin 120°}=\dfrac{B'O'}{\sin 45°}$,所以 $B'B''=\dfrac{B'O'\cdot\sin 120°}{\sin 45°}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}$,由斜二测画法可知,在原平面图形中,点 B 到 x 轴的

距离是 $2B'B''=2\sqrt{6}$. **故 A 正确.**

快解 由 $O'B'=2$, $\angle B'O'A'=60°$, 得 B'到 x' 的距离 $h'=O'B'\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$, 则 B 到 x 轴的距离 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{6}$.

7. C 【解析】用斜二测画法画出的水平放置的直角梯形 $ABCD$ 的直观图 $A'B'C'D'$ 如图所示. 可知四边形 $A'B'C'D'$是梯形, $A'B'=4$, $A'D'=\sqrt{2}$, $D'C'=2$, 且 $D'C'//A'B'$, 过点 D' 作 $D'E\perp A'B'$于点 E, 由 $\angle D'A'B'=45°$, 得 $D'E=1$, 所以 $S_{四边形A'B'C'D'}=\dfrac{(2+4)\times 1}{2}=3$. **故 C 正确.**



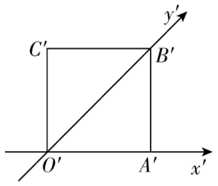
快解 由已知可得 $S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(2+4)\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, 则由 $S_{直观图}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}$ 得 $S_{四边形A'B'C'D'}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{梯形ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times 6\sqrt{2}=3$. **故 C 正确.**

归纳总结 在斜二测画法中, (1) 直观图中任意一点到 x' 轴的距离都为原图形中对应点到 x 轴距离的$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$倍; (2) $S_{直观图}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}S_{原图}$.

能力上分

1. C 【解析】$A'D'//y'$轴, 根据斜二测画法规则, 在原图形中应有 $AD\perp BC$, 又 AD 为 BC 边上的中线, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, AD 为 BC 边上的高, 则有 AB, AC 相等且 AD 最短. **故 C 正确.**

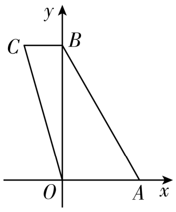
2. A 【解析】依题意可知四边形 $OABC$ 为平行四边形, 则直观图 $O'A'B'C'$ 也为平行四边形, 其直观图如图所示.



又 $OA=2$, $OB=4\sqrt{2}$, 则 $O'A'=2$, $O'B'=\frac{1}{2}OB=2\sqrt{2}$, $\angle A'O'B'=45°$, 所以 $S_{\triangle A'O'B'}=\frac{1}{2}O'A'\cdot O'B'\cdot\sin 45°=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$, 所以 $S_{四边形O'A'B'C'}=2S_{\triangle A'O'B'}=4$. **故 A 正确.**

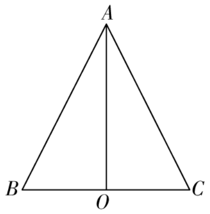
一题多解 根据题意, 四边形 $OABC$ 的面积为 $2\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$, 所以直观图 $O'A'B'C'$ 的面积为 $8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=4$. **故 A 正确.**

3. B 【解析】画出原平面图形 $OABC$, 如图, 其中 $OA=O'A'$, $BC=B'C'$, 故 $BC=\frac{1}{2}OA$, $OB=2O'B'=2\sqrt{2}O'A'=2\sqrt{2}OA$. 设 $BC=x$, 则 $OA=2x$, $OB=4\sqrt{2}x$, 平面图形 $OABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}(BC+OA)\cdot OB=6\sqrt{2}x^2$, 故 $6\sqrt{2}x^2=3\sqrt{2}$, 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $O'A'=2x=\sqrt{2}$. **故 B 正确.**

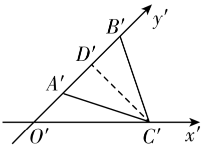


一题多解 原平面图形 $OABC$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 所以 $S_{四边形O'A'B'C'}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 3\sqrt{2}=\frac{3}{2}$. 由题可知, $B'C'=\frac{1}{2}O'A'$, $A'B'=O'A'$, 所以梯形 $O'A'B'C'$ 的面积 $S_{梯形O'A'B'C'}=\frac{1}{2}(O'A'+B'C')\cdot A'B'=\frac{3}{4}O'A'^2=\frac{3}{2}$, 解得 $O'A'=\sqrt{2}$. **故 B 正确.**

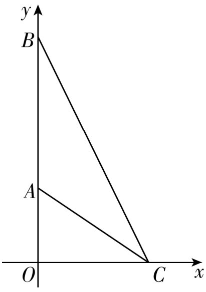
4. C 【解析】将水平放置的$\triangle ABC$的直观图还原,可知$AO=2A'O'=2$,$OB=OC=B'O'=C'O'=1$,$AO\perp BC$.由勾股定理有$AB=AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,注意到$AB=AC=\sqrt{5}>2=BC$,所以$\triangle ABC$是等腰三角形,不是等边三角形,由大边对大角可知,$\triangle ABC$中最大角的余弦值为$\frac{2^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$,即$\triangle ABC$中的最大角是锐角,$\triangle ABC$是锐角三角形,不是直角三角形,**故 C 正确.**



5. C 【解析】如图①,在直观图$\triangle A'B'C'$中,$A'B'=2$,$A'C'=B'C'=\sqrt{5}$,取$A'B'$中点D',连接$C'D'$,则$C'D'\perp A'B'$,又$\angle B'O'C'=45°$,所以$O'D'=C'D'=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$,则$O'A'=1$,$O'C'=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,$B'O'=3$.



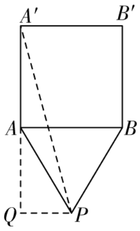
图①



图②

由斜二测画法还原出$\triangle ABC$,如图②,则$OC=O'C'=2\sqrt{2}$,$OA=2O'A'=2$,所以$AC=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$. **故 C 正确.**

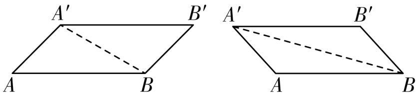
6.【解】(1)将漏斗部分表面展开,如图①所示,连接$A'P$,



图①

由两点间线段最短可得线段 $A'P$ 为蚂蚁爬行的最短路径，过点 P 作 $PQ\perp A'A$ 交 $A'A$ 的延长线于点 Q，则 $AQ=AP\cdot\cos 30°=\sqrt{3}$，$PQ=AP\cdot\sin 30°=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle A'PQ$ 中，$A'P=\sqrt{A'Q^2+PQ^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，所以蚂蚁爬过的最短路径的长为 $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 米.

(2)正方形 $ABB'A'$ 的斜二测画法有以下两种：



图②　　图③

如图②，$\angle A'AB=45°$，连接 $A'B$，在 $\triangle A'AB$ 中，由余弦定理可得 $A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2-2AA'\cdot AB\cdot\cos\angle A'AB}=\sqrt{1^2+2^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$；

如图③，$\angle A'AB=135°$，连接 $A'B$，在 $\triangle A'AB$ 中，由余弦定理可得 $A'B=\sqrt{AA'^2+AB^2-2AA'\cdot AB\cdot\cos\angle A'AB}=\sqrt{1^2+2^2+2\sqrt{2}}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

综上所述，$A'B=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 米或 $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ 米.

8.3　简单几何体的表面积与体积

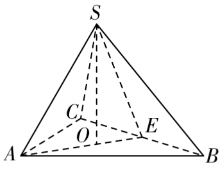
8.3.1　棱柱、棱锥、棱台的表面积和体积

对点上分

1. B　【解析】设正方体的棱长为 $x(x>0)$，则正四面体 $B-A_1C_1D$ 的棱长为 $\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$，所以正四面体 $B-A_1C_1D$ 的表面积 $S_{B-A_1C_1D}=4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\times\sqrt{2}x\times\sin 60°=2\sqrt{3}x^2=a^2$，所以 $x^2=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$，所以正方体的表面积

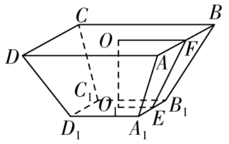
$S_{\text{正方体}ABCD-A_1B_1C_1D_1}=6x^2=\sqrt{3}a^2$. 故 B 正确.

2. B 【解析】如图,在正三棱锥 $S-ABC$ 中,SO 是高,则 O 为正三角形 ABC 的中心,连接 AO 并延长交 BC 于点 E,连接 SE,则 E 为 BC 的中点,且 $SE\perp BC$. 依题意,$SO=1$,正三角形 ABC 的边长为 2,所以 $AE=2\sin 60°=\sqrt{3}$,$OE=\frac{1}{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$S_{\triangle SBC}=\frac{1}{2}BC\cdot SE=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以该三棱锥的侧面积为 $3S_{\triangle SBC}=2\sqrt{3}$. 故 B 正确.



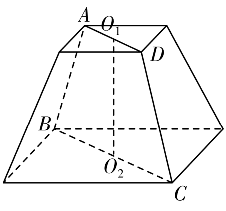
3. $600\sqrt{2}$ 【解析】由题意知该"升子"的各侧面是两底边长分别为 20 cm,10 cm,腰长为 15 cm 的等腰梯形. 如图,设两底面的中心分别为 O,O_1,取 AB,A_1B_1 的中点 F,E,连接 OO_1,O_1E,EF,FO,所以侧面的高

$$EF=\sqrt{AA_1^2-\left(\frac{AB-A_1B_1}{2}\right)^2}=\sqrt{15^2-\left(\frac{20-10}{2}\right)^2}=10\sqrt{2}\,(\text{cm}).$$



若将各侧面展开,则可拼接成一个一条边长为 60 cm,另一条边长为 15 cm 的平行四边形,且较长边上的高为 $10\sqrt{2}$ cm,所以所求面积为 $10\sqrt{2}\times60=600\sqrt{2}$ (cm^2).

4. B 【解析】设正四棱台的上、下底面中心分别为 O_1,O_2,连接 O_1O_2,则 O_1O_2 即为正四棱台的高,如图所示.



取过正四棱台的轴 O_1O_2 和侧棱 AB，CD 的截面 $ABCD$，易知 $AD=4$，$BC=8$，

所以可得截面是上底为 4，下底为 8，腰长为 $2\sqrt{5}$ 的等腰梯形，

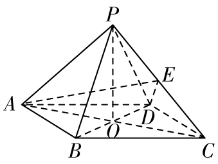
则 $O_1O_2=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC-AD}{2}\right)^2}=\sqrt{20-2^2}=4$，

所以正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}[(2\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2+\sqrt{8\times32}]\times4=\frac{224}{3}$. **故选 B.**

5. D

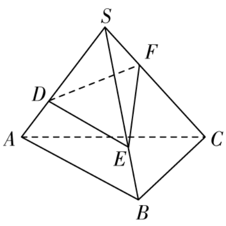
攻略上分 本题不易直接求解三棱锥 $P-ADE$ 的体积，可利用通法攻略 23 中的转化法，先利用等体积法，再利用比例转化法，进而求解.

【解析】如图，连接 AC 与 BD 交于点 O，连接 PO，则 PO 为棱锥的高. 又 $AB=2$，$PA=2\sqrt{2}$，所以 $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$. 因为 E 是棱 PC 的中点，所以 $V_{P-ADE}=V_{E-PAD}=\frac{1}{2}V_{C-PAD}=\frac{1}{2}V_{P-ADC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ADC}\times PO=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **故 D 正确.**



6. B **【解析】**如图，连接 DE，DF，EF，当水面是 DEF 时，容器可盛水最多.

因为 $SD:DA=SE:EB=2:1$，所以 $S_{\triangle SDE}=\frac{4}{9}S_{\triangle SAB}$. 又因为 $CF:FS=2:1$，所以 $V_{F-SDE}=\frac{4}{27}\cdot V_{C-SAB}$，则容器最多可盛水的体积为三棱锥容器体积的$\frac{23}{27}$. **故 B 正确.**



7. A

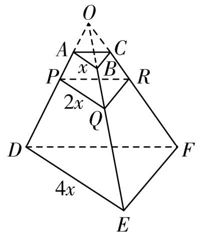
思路分析 由题意确定几何体 $AEF-A_1B_1C_1$ 为三棱台，再结合棱台的体积公式求出三棱台 $AEF-A_1B_1C_1$ 的体积和棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积，作差得结果.

【解析】因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $EF // BC$，$EF=\frac{2}{3}BC$，所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$，则 $\frac{EF}{B_1C_1}=\frac{AF}{A_1C_1}=\frac{AE}{A_1B_1}=\frac{2}{3}$，故几何体 $AEF-A_1B_1C_1$ 为三棱台. 设三棱台 $AEF-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1，多面体 $BCFEB_1C_1$ 的体积为 V_2，三棱柱的高为 h，则 $V_1=\frac{1}{3}(S_{\triangle AEF}+\sqrt{S_{\triangle AEF}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}+S_{\triangle A_1B_1C_1})\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\cdot S_{\triangle ABC}+\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABC}\right)\cdot h=\frac{19}{27}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{19}{27}V_{ABC-A_1B_1C_1}$，故 $V_2=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_1=\frac{8}{27}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{8}{27}\times3\sqrt{3}\times3=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，故 A 正确.

8. B

思路分析 将三棱台补成三棱锥 $O-DEF$，将面积比转换为边长比，再由三棱锥和三棱台的体积比与边长比的关系，即可求出三棱锥 $O-ABC$ 的体积以及三棱台 $PQR-DEF$ 的体积.

【解析】如图，将三棱台补成三棱锥 $O-DEF$，因为 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PQR}:S_{\triangle DEF}=1:4:16$，所以 $AB:PQ:DE=1:2:4$. 设 $AB=x$，$PQ=2x$，$DE=4x$，三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 a，三棱台 $PQR-DEF$ 的体积为 b，则
$$\begin{cases}\frac{a}{a+1}=\left(\frac{x}{2x}\right)^3,\\ \frac{a}{a+b+1}=\left(\frac{x}{4x}\right)^3,\end{cases}$$
所以 $a=\frac{1}{7}$，$b=8$. 故 B 正确.



一题多解 将三棱台补形成三棱锥 $O-DEF$，根据题意得 $AB:PQ:DE=1:2:4$，则 $V_{O-ABC}:V_{ABC-PQR}:V_{PQR-DEF}=1:7:56$，又 $V_{ABC-PQR}=1$，所以 $V_{PQR-DEF}=8$. 故 B 正确.

9. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　【解析】要使堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大，则只需要 $\triangle ABC$ 的面积最大即可.

在 $Rt\triangle ACB$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2=8$，则 $8=AC^2+BC^2\geqslant 2AC\cdot BC$，即 $AC\cdot BC\leqslant 4$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\leqslant\frac{1}{2}\times4=2$，当且仅当 $AC=BC$ 时取等号，即堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大时，$AC=BC=2$，此时阳马 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}AC\cdot AA_1\cdot BC=\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{2}\times2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

提示：此几何体为阳马，由题可知侧棱 BC 垂直于底面 A_1ACC_1

10. C　【解析】因为正四棱锥的底面边长为 4，所以底面的对角线长为 $4\sqrt{2}$. 设正四棱柱和正四棱锥的高为 h，因为正四棱锥的侧棱长为 $2\sqrt{3}$，所以 $h^2+(2\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2$，解得 $h=2$，故该几何体的体积为 $4\times4\times2+\frac{1}{3}\times4\times4\times2=\frac{128}{3}$. 故 C 正确.

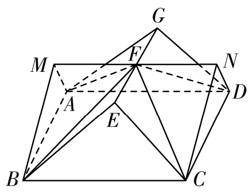
11. D　【解析】如图所示，该几何体可视为直三棱柱 $BCE-ADG$ 与两个三棱锥 $F-MAB$，$F-NCD$ 拼接而成.

记直三棱柱 $BCE-ADG$ 的高为 h，底面 BCE 的面积为 S，所求几何体的体积为 V，

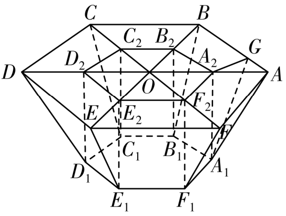
则 $S=\frac{1}{2}BE\cdot CE\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，由于是两个相同的直三棱柱，所以 $S_{\triangle MAB}=S_{\triangle NCD}=S$，$h=CD=BC=2$。

则 $V=V_{三棱柱BCE-ADG}+V_{三棱锥F-MAB}+V_{三棱锥F-NCD}=Sh+\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h=\frac{4}{3}Sh=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.



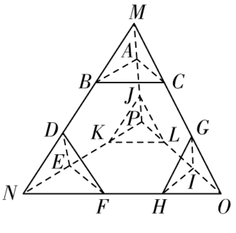
12. A 【解析】正六棱柱的六个侧面面积之和为 $2\times6\times6=72(\mathrm{dm}^2)$，正六棱柱的底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=6\sqrt{3}(\mathrm{dm}^2)$. 如图所示，正六棱台 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中，$A_1B_1=2\ \mathrm{dm}$，$AB=4\ \mathrm{dm}$，过点 A_1，B_1，C_1，D_1，E_1，F_1 分别作 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2，D_1D_2，E_1E_2，F_1F_2 垂直于底面 $ABCDEF$ 于点 A_2，B_2，C_2，D_2，E_2，F_2，连接 A_2B_2，B_2C_2，C_2D_2，D_2E_2，E_2F_2，F_2A_2，连接 AD，BE，CF 相交于点 O，则 A_2，B_2，C_2，D_2，E_2，F_2 分别为 OA，OB，OC，OD，OE，OF 的中点，过点 A_2 作 $A_2G\perp AB$ 于点 G，连接 A_1G，则 A_1G 为正六棱台的斜高，其中 $A_1A_2=1\ \mathrm{dm}$，$AG=\frac{AB-A_2B_2}{2}=1(\mathrm{dm})$，$AA_2=\frac{1}{2}AO=2(\mathrm{dm})$，由勾股定理得 $A_2G=\sqrt{A_2A^2-AG^2}=\sqrt{3}(\mathrm{dm})$，故 $A_1G=\sqrt{A_2G^2+A_1A_2^2}=2(\mathrm{dm})$，所以正六棱台的斜高为 2 dm，故正六棱台的侧面积为 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\times6=36(\mathrm{dm}^2)$，又正六棱台的下底面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times6=24\sqrt{3}(\mathrm{dm}^2)$，所以该花灯的表面积为 $72+6\sqrt{3}+36+24\sqrt{3}=(108+30\sqrt{3})\mathrm{dm}^2$. **故 A 正确.**



易错警示 求组合体的表面积时考虑不全致错

解决此类求组合体表面积的问题时，切忌直接套用柱、锥、台体的表面积公式，应先分析该组合体由哪些简单几何体组成，几何体各个面间有无重叠，再结合相应几何体选择公式计算求解.

13.【解】(1)如图，补全正四面体，正四面体 $M-ABC$ 的棱长为正四面体 $M-PNO$ 的棱长的$\frac{1}{3}$，因为棱长为 a 的正四面体的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\sin 60°\times\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$，所以$\frac{V_{M-ABC}}{V_{M-PNO}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，所以截去部分的体积为$\frac{4}{27}V_{M-PNO}$，剩下部分的体积为$\frac{23}{27}V_{M-PNO}$，所以石凳的体积与原正四面体的体积之比为$\frac{23}{27}V_{M-PNO}:V_{M-PNO}=\frac{23}{27}$.



(2)因为正四面体 $M-PNO$ 的棱长为 60 cm，所以 $S_{\triangle MNO}=\frac{1}{2}\times60^2\times\sin 60°=900\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，$S_{\triangle MBC}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times20^2\times\sin 60°=100\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，所以 $S_{六边形BCGHFD}=S_{\triangle MNO}-3S_{\triangle MBC}=600\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，所以石凳的表面积 $S=4(S_{六边形BCGHFD}+S_{\triangle ABC})=2\ 800\sqrt{3}\approx$

$4\ 844(cm^2)$，即石凳的表面积约为 $0.484\ 4\ m^2$，所以粉刷一个石凳约需要 $0.484\ 4\times50=24.22$(元).

8.3.2　圆柱、圆锥、圆台、球的表面积和体积

对点上分

1. D　【解析】因为圆柱的底面半径 $r=2$，所以母线长 $l=2\times2r=8$，

所以圆柱的表面积为 $2\pi r^2+2\pi rl=8\pi+32\pi=40\pi$. **故选** D.

2. D　【解析】已知圆锥的母线长 $l=2$，设圆锥的底面半径为 r，高为 h，由已知得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\times2r\times h=\sqrt{3},\\ h^2+r^2=2^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\ h=\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=\sqrt{3},\\ h=1,\end{cases}$ 由于圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}\times2\pi r\times l=2\pi r$，所以 $S=2\pi$ 或 $S=2\sqrt{3}\pi$，**故** D **正确**.

> **关键点拨**　求解圆锥的侧面积或表面积时，牢记“圆锥的侧面展开图是扇形，且该扇形的弧长为圆锥的底面周长”“圆锥的轴截面是等腰三角形”这些性质是关键.

3. B　【解析】设这个圆柱和圆锥的底面半径为 r，

因为圆柱的轴截面是一个正方形，所以其高 $h=2r$，

则圆柱的侧面积 $S_1=2\pi r\times2r=4\pi r^2$，

圆锥的侧面积 $S_2=\pi r\sqrt{(2r)^2+r^2}=\sqrt{5}\pi r^2$，

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r^2}{\sqrt{5}\pi r^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **故选** B.

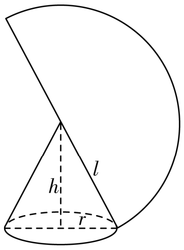
4. 65π　【解析】由题意得，圆台形容器的侧面积 $S_1=\pi(10+5)\times15=225\pi(cm^2)$，下底面面积 $S_2=100\pi\ cm^2$，则涂一个这样的圆台形容器至少需要 $0.2\times(225\pi+$

$100\pi)=65\pi(\mathrm{g})$防锈漆.

5. A 【解析】设圆锥的底面半径为 r,母线长 l,因为侧面展开图是一个半圆,则 $\pi l=2\pi r$,即 $l=2r$,

则 $\pi r^2+\pi rl=12\pi$,可得 $r=2,l=4$,利用勾股定理求得圆锥的高 $h=2\sqrt{3}$,

所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **故选 A.**



6. B 【解析】由已知可得四片瓦的体积 $V=\pi\times12^2\times20-\pi\times10^2\times20=880\pi(\mathrm{cm}^3)$,所以 500 名学生每人制作四片瓦共需黏土的体积为 $500\times880\pi=440\ 000\pi\approx1\ 381\ 600(\mathrm{cm}^3)=1.381\ 6(\mathrm{m}^3)$. **故 B 正确.**

7. C 【解析】设圆台的上、下底面半径分别为 r,R,依题意得 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times3$,解得 $r=1$,$2\pi R=\frac{2\pi}{3}\times6$,解得 $R=2$,圆台的母线长 $l=6-3=3$,故圆台的高 $h=\sqrt{l^2-(R-r)^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$,**故 A,B 正确**;圆台的侧面积 $S_{圆台侧}=\pi\times(1+2)\times3=9\pi$,**故 C 错误**;圆台的体积 $V_{圆台}=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\times4\pi})=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$,**故 D 正确. 故选 C.**

归纳总结 **柱体、锥体、台体的体积之间的关系**

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{SS'}+S)h$

$S'=S$:$V_{柱体}=Sh$

$S'=0$:$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

其中,S',S 分别为台体上、下底面面积,h 为柱体、锥体、台体的高.

8. BCD　【解析】因为圆锥的底面半径 $r=3$，母线长 $l=4$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

对于 A，因为圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{底}\ h=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}\pi$，**故 A 错误.**

对于 B，因为圆锥的底面半径为 3，所以圆锥的底面周长为 6π，又因为圆锥的母线长为 4，所以圆锥的侧面展开图的圆心角为 $\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，**故 B 正确.**

对于 C，设圆锥的两条母线的夹角为 θ，过这两条母线作截面，其面积 $S_1=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin\theta=8\sin\theta$. 设圆锥轴截面三角形的顶角为 θ_1，则 $\theta\leqslant\theta_1$，由题可知 $\cos\theta_1=\frac{16+16-36}{2\times4\times4}=-\frac{1}{8}<0$，所以 θ_1 为钝角. 所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，面积有最大值，最大值为 8，**故 C 正确.**

对于 D，圆锥的侧面积 $S_2=\frac{1}{2}\times2\pi\times3\times4=12\pi$，**故 D 正确. 故选 BCD.**

9. $\frac{7}{4}$　【解析】由题意可知，水的体积等于圆台的体积，

根据题中数据可知，水的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times(1^2+2^2+1\times2)\times3=7\pi$.

将水倒入一个底面半径为 2，高为 3 的圆柱形容器中，设水深为 h，

由柱体体积公式可得 $\pi\times2^2\times h=7\pi$，解得 $h=\frac{7}{4}$.

10. B　【解析】由题意可知该球半径的最大值为 2 厘米，则该球体积的最大值是 $\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32\pi}{3}$（立方厘米）. **故选 B.**

11. A　【解析】设球 O 的半径为 R，依题意得 $OO_1^2+r_1^2=R^2=OO_2^2+r_2^2$，则 $(4-OO_2)^2+1=OO_2^2+9$，解得 $OO_2=1$，因此 $R^2=10$，所

以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=40\pi$. 故 A 正确.

12. C 【解析】球的半径 $R=24$ cm,上球冠的高 $h_1=6$ cm,下球冠的高 $h_2=4$ cm,设下球冠圆面的半径为 r,则 $r^2=24^2-20^2=176(\text{cm}^2)$,所以该瓷器的外表面面积为 $4\pi\times24^2-2\pi\times24\times6-2\pi\times24\times4+\pi\times176=2\ 000\pi\approx6\ 280(\text{cm}^2)$. 故 C 正确.

13. C 【解析】设圆柱的高为 h,

则 $S=2\pi R^2+2\pi Rh$,所以 $h=\dfrac{S-2\pi R^2}{2\pi R}$,

酒杯的容积 $V_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2h=\dfrac{2}{3}\pi R^3+\pi R^2\dfrac{S-2\pi R^2}{2\pi R}=\dfrac{S}{2}R-\dfrac{\pi}{3}R^3$,

半球的体积 $V_2=\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

因为酒杯的容积不大于半球体积的 2 倍,

所以 $\dfrac{S}{2}R-\dfrac{\pi}{3}R^3\leqslant\dfrac{4\pi}{3}R^3$,

解得 $R\geqslant\sqrt{\dfrac{3S}{10\pi}}$.

又因为 $h=\dfrac{S-2\pi R^2}{2\pi R}>0$,所以 $R<\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$,

所以 $\sqrt{\dfrac{3S}{10\pi}}\leqslant R<\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$,

当 $S=10\pi$ 时,$\sqrt{3}\leqslant R<\sqrt{5}$,$R$ 的最小值为 $\sqrt{3}$. 故选 C.

14. B 【解析】由题可知,上底面和下底面的半径分别为 $\dfrac{1}{2}$,1,则 $V_{\text{圆台}}=\dfrac{1}{3}\times1\times\left[\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\pi\times1^2+\sqrt{\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\pi\times1^2}\right]=\dfrac{7\pi}{12}$,$V_{\text{圆锥}}=\dfrac{1}{3}\times1\times\pi\times1^2=\dfrac{\pi}{3}$,

故剩下几何体的体积为 $V_{\text{圆台}}-V_{\text{圆锥}}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$. 故选 B.

15. D 【解析】由 $AC=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{CD-AB}{2}\right)^2}=$

$\sqrt{3^2+\left(\frac{20-12}{2}\right)^2}=5(\text{cm})$,

$CE=\sqrt{4^2+\left(\frac{CD-EF}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{20-14}{2}\right)^2}=5(\text{cm})$，可得该瓷器的侧面积为 $12\pi\times18+5\times(6+10)\pi+5\times(7+10)\pi=381\pi(\text{cm}^2)$. **故 D 正确.**

归纳总结 圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式间的关系

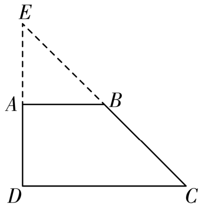
$S_{圆台侧}=\pi(r'+r)l$

$r'=r$ 时：$S_{圆柱侧}=2\pi rl$　　$r'=0$ 时：$S_{圆锥侧}=\pi rl$

其中，r'，r 分别为圆台的上、下底面的半径，l 为柱体、锥体、台体的母线.

16. A 【解析】由题知该组合体上半部分为圆锥，由于其母线长为 $2\sqrt{3}$ 米，轴截面是面积为 $3\sqrt{3}$ 平方米的等腰钝角三角形，设其高为 h，底面半径为 r，则有 $\begin{cases}h^2+r^2=12,\\ \frac{1}{2}\times2r\times h=3\sqrt{3},\\ r>h,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=3,\\ h=\sqrt{3},\end{cases}$ 则该组合体上半部分圆锥的侧面积 $S_1=\pi\times3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\pi$(平方米)，下半部分圆柱的侧面积 $S_2=2\pi\times3\times2.5=15\pi$(平方米)，则该组合体的表面积(不含底面)为 $S_1+S_2=(6\sqrt{3}+15)\pi$(平方米). **故 A 正确.**

17. BCD 【解析】延长 DA，CB 交于点 E，如图.



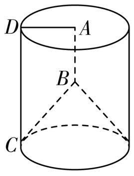
由题意得，$AE=AD=2$，$BE=BC=\sqrt{AD^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$.

对于 A，以 AD 所在直线为轴旋转，得到

一个圆台,圆台的侧面积 $S=\pi(2+4)\times 2\sqrt{2}=12\sqrt{2}\pi$,A 错误.

对于 B,以 CD 所在直线为轴旋转,得到一个以 2 为底面半径,以 2 为高的圆柱与一个以 2 为底面半径,以 2 为高的圆锥形成的组合体,该组合体的体积 $V=2^2\times 2\pi+\frac{1}{3}\times 2^2\times 2\pi=\frac{32}{3}\pi$,B 正确.

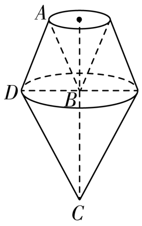
对于 C,以 AB 所在直线为轴旋转,得到一个圆柱挖去一个圆锥的旋转体,如图①,



图①

所以该旋转体表面积 $S'=4\pi+2\times 2\times 4\pi+2\sqrt{2}\times 2\pi=20\pi+4\sqrt{2}\pi$,C 正确.

对于 D,以 BC 所在直线为轴旋转,得到一个圆锥和一个挖去一个小圆锥的圆台形成的组合体,如图②,



图②

该旋转体体积 $V'=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times 2\sqrt{2}\pi+\frac{1}{3}\times[(\sqrt{2})^2\pi+\sqrt{(\sqrt{2})^2\pi\times(2\sqrt{2})^2\pi}+(2\sqrt{2})^2\pi]\times\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}\pi=\frac{28\sqrt{2}\pi}{3}$,D 正确. 故选 BCD.

18. D 【解析】因为正四棱台的上、下底面边长分别为 $\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$,

所以上、下底面正方形外接圆半径依次为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$,$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$,

根据对称性可知,该棱台外接球的球心在棱台上、下底面外接圆的圆心的连

线上.

设该棱台外接球的球心 O 到上底面的距离为 h,该棱台外接球的半径为 R,

所以 $R^2=1+h^2=9+(2\sqrt{2}-h)^2$,解得 $h=2\sqrt{2}$,$R=3$,

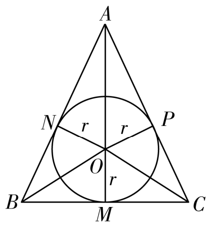
故所求体积为$\frac{4}{3}\times\pi\times3^3=36\pi$. **故选** D.

19. D 【**解析**】如图,$\triangle ABC$ 为圆锥的轴截面,其中 $BC=2$,$AB=AC=3$,且 M 为 BC 边上的中点,设内切圆的圆心为 O.

由于 $AM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

设内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times AB\times r+\frac{1}{2}\times BC\times r+\frac{1}{2}\times AC\times r=\frac{1}{2}\times(3+3+2)\times r=2\sqrt{2}$,

解得 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故所求球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. **故选** D.

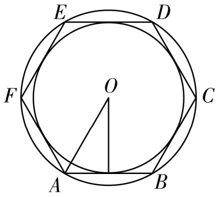


20. D 【**解析**】因为半径为 $2\sqrt{3}$ 的球与正六棱柱的各个面均相切,所以正六棱柱的高 $h=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,底面正六边形的内切圆半径为 $2\sqrt{3}$.

如图所示,正六边形外心和内心是同一点,根据内切圆半径和外接圆半径的关系,可得底面正六边形的外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4$,

所以该正六棱柱外接球半径 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$,

所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=112\pi$. **故选** D.



21. D 【解析】由于该正方体魔方的棱长为 2,故其外接球的半径为$\sqrt{3}$,

当正四面体盒子的棱长最小时,正四面体内切球的半径为$\sqrt{3}$.

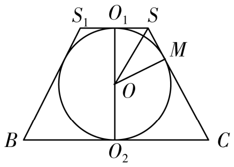
设正四面体棱长为 a,其高为 $\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

根据等体积法得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$,解得 $a=6\sqrt{2}$. **故选** D.

22. D

攻略上分 本题为圆台的内切球问题,可利用通法攻略 24 中的圆台模型求得内切球半径,进而结合题目条件求解.

【解析】如图为几何体的轴截面,O_1,O_2 分别为上、下底面中心,O 为球心,M 为球与母线的切点,



则$\angle OMS=\angle OO_1S=90°$,

因为 $OO_1=OM=R$,$OS=OS$,

所以$\triangle OMS$ 与$\triangle OO_1S$ 全等,所以 $SM=O_1S=r_1$,同理可得 $CM=r_2$,

所以圆台母线长 $l=r_1+r_2$.

所以 $2R=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$,

则 $R^2=r_1r_2=4r_1+r_2$,化简得 $r_2=\frac{4r_1}{r_1-1}(r_1>1)$,

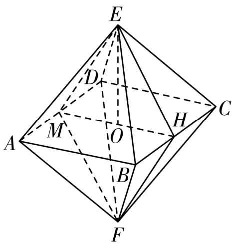
所以圆台的侧面积为 $\pi(r_1+r_2)l=\pi(r_1+$

$r_2)^2=\pi\left(r_1+\frac{4r_1}{r_1-1}\right)^2=\pi\left(r_1-1+\frac{4}{r_1-1}+5\right)^2\geqslant\pi\left(2\sqrt{(r_1-1)\times\frac{4}{r_1-1}}+5\right)^2=81\pi$,

当且仅当 $r_1-1=\frac{4}{r_1-1}$，即 $r_1=3$ 时等号成立，

故圆台侧面积的最小值为 81π. **故选** D.

23. D 【解析】如图，设正方形 $ABCD$ 的中心为 O，BC，AD 的中点分别为 H，M，连接 MH，EO，EH，MF，HF，EM.



设金刚石的棱长为 a，则 $8\times\frac{1}{2}a^2\sin\ 60°=2\sqrt{3}a^2=18\sqrt{3}$，所以 $a=3$.

在等边三角形 EBC 中，BC 边上的高 $EH=\sqrt{EC^2-CH^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

在 Rt $\triangle EOH$ 中，$EO=\sqrt{EH^2-OH^2}=\sqrt{\frac{27}{4}-\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 根据题意，最大球即为金刚石的内切球，由对称性易知内切球的球心在 O 点，内切球与 $\triangle EBC$ 的切点在线段 EH 上，球的半径即为截面 $EMFH$ 内切圆的半径，设内切圆半径为 r，由等面积法可知 $S_{\triangle EMH}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot r$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以内切球的半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

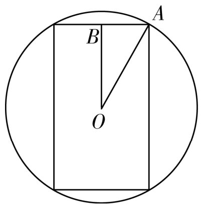
则内切球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$. **故** D **正确**.

24. $\frac{32\pi}{3}$ 【解析】作圆柱的轴截面，如图.

由题意可知 $OB=\sqrt{3}$，$AB=1$，则球 O 的半径 $R=OA$，且 $OA^2=OB^2+AB^2=3+1=4$，

所以 $R=2$，

所以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$.



8.2~8.3 节测上分

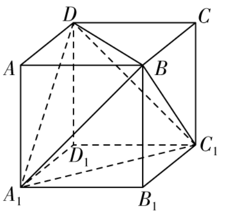
1. D 【解析】因为三棱柱的高为 6,其底面三角形 ABC 水平放置的直观图(斜二测画法)为 $\triangle A'B'C'$,其中 $O'A'=O'B'=2$, $O'C'=\sqrt{3}$,所以三棱柱的底面面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,体积为 $4\sqrt{3}\times 6=24\sqrt{3}$. **故 D 正确.**

2. AB 【解析】设球的半径为 R,则圆柱的底面圆的半径为 R,高为 $2R$,则 $S_{球}=4\pi R^2$, $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$, $S_{圆柱}=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2R=6\pi R^2$, $V_{圆柱}=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$,所以 $S_{圆柱}:S_{球}=6\pi R^2:4\pi R^2=3:2$,**故 A 正确;** $V_{圆柱}:V_{球}=2\pi R^3:\frac{4}{3}\pi R^3=3:2$,**故 B 正确;** $S_{圆柱}:V_{圆柱}=6\pi R^2:2\pi R^3=3:R$,**故 C 错误;** $S_{球}:V_{球}=4\pi R^2:\frac{4}{3}\pi R^3=3:R$,**故 D 错误.**

3. A 【解析】设原圆柱的底面圆半径为 r,高为 h,则原圆柱的表面积为 $2\pi r^2+2\pi rh$,新几何体的表面积为 $2\pi r^2+2\pi rh+2rh$,故 $2rh=10$,故原圆柱的侧面积为 $2\pi rh=10\pi$. **故 A 正确.**

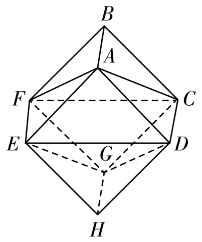
4. C 【解析】如图,设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,易得 $V_{B_1-A_1BC_1}=V_{A-A_1BD}=V_{D_1-A_1DC_1}=V_{C-C_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{6}a^3$,所以 $V_{B-A_1DC_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-4V_{B_1-A_1BC_1}=a^3-4\times\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{3}a^3=72$,解得 $a=6$,故正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长

为 6. **故 C 正确.**



5. B 【解析】因为几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，$AB=2A_1B_1=4$，$\angle A_1AB=60°$，侧面以及对角面为等腰梯形，故 $AA_1=\dfrac{\frac{1}{2}(AB-A_1B_1)}{\cos\angle A_1AB}=2$，$AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$，$A_1O_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，所以 $OO_1=\sqrt{AA_1^2-(AO-A_1O_1)^2}=\sqrt{2}$，所以该正四棱台的体积 $V=\dfrac{1}{3}OO_1\cdot(S_{四边形ABCD}+S_{四边形A_1B_1C_1D_1}+\sqrt{S_{四边形ABCD}S_{四边形A_1B_1C_1D_1}})=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times(16+4+8)=\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$，**故 B 正确.**

6. A 【解析】如图，在正方体 $ABCD-EFGH$ 中，若要使液面形状不为三角形，则平面 EGD 平行于水平面放置时，液面必须高于平面 EGD，且低于平面 AFC，若满足上述条件，则任意转动正方体，液面形状都不可能为三角形.



所以 $V_{G-EHD}<V<V_{正方体ABCD-EFGH}-V_{B-AFC}$，又 $V_{G-EHD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1^2\times1=\dfrac{1}{6}$，$V_{正方体ABCD-EFGH}-V_{B-AFC}=1^3-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$，所以 V 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6}\right)$. **故 A 正确.**

7. AC 【解析】圆锥的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times\pi\times1^2\times2=\dfrac{2\pi}{3}$，表面积 $S_1=\pi\times1^2+\pi\times1\times$

$\sqrt{2^2+1^2}=(\sqrt{5}+1)\pi$，所以 $\frac{V_1}{S_1}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{(\sqrt{5}+1)\pi}=\frac{\sqrt{5}-1}{6}$.

圆柱的体积 $V_2=\pi\times1^2\times2=2\pi$，表面积 $S_2=2\times\pi\times1^2+2\times\pi\times1\times2=6\pi$，所以 $\frac{V_2}{S_2}=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}$.

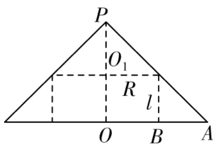
圆台的体积 $V_3=\frac{1}{3}\times2\times\left[\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\sqrt{\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]=\frac{13\pi}{6}$，表面积 $S_3=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\times\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{5}\right)\pi$，所以 $\frac{V_3}{S_3}=\frac{\frac{13\pi}{6}}{\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{5}\right)\pi}=\frac{52\sqrt{5}-65}{165}$.

球的体积 $V_4=\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=\frac{4\pi}{3}$，表面积 $S_4=4\times\pi\times1^2=4\pi$，所以 $\frac{V_4}{S_4}=\frac{\frac{4\pi}{3}}{4\pi}=\frac{1}{3}$.

所以圆柱、球的体积与其表面积之比最大. **故选** AC.

8. (1) $R+l=6$　(2) $18\pi\ \text{cm}^2$　(3) $16\pi\ \text{cm}^3$

【**解析**】(1) 作出圆锥的轴截面，如图，因为 $PO=OA=6$ cm，所以 $\angle A=45°$，所以 $AB=l$，又 $OB=R$，所以 $R+l=6$.



(2) 圆柱 OO_1 的侧面积 $S=2\pi Rl\leqslant2\pi\cdot\left(\frac{R+l}{2}\right)^2=18\pi(\text{cm}^2)$，当且仅当 $R=l=3$ cm 时等号成立，即圆柱 OO_1 的侧面积的最大值为 $18\pi\ \text{cm}^2$.

(3) 由题意，圆柱 OO_1 的侧面积 $S_1=2\pi Rl$，圆锥 PO_1 的底面半径为 R，母线长

为$\sqrt{2}R$,侧面积 $S_2=\pi R(\sqrt{2}R)=\sqrt{2}\pi R^2$.
因为 $S_1=2\sqrt{2}S_2$,所以 $2\pi Rl=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\pi R^2$,解得 $l=2R$,因为 $R+l=6$,所以 $R=2$ cm,$l=4$ cm,圆柱 OO_1 的体积 $V=\pi R^2l=16\pi(\text{cm}^3)$.

8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系

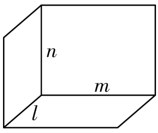
8.4.1 平面

对点上分

1. D 【解析】对于 A,当三个点共线时,可作无数个平面,**所以 A 是假命题.**

对于 B,如果这个点在这条直线上,这时有无数个平面,**所以 B 是假命题.**

对于 C,如图,l,m,n 两两相交,此时确定三个平面,**所以 C 是假命题.**



对于 D,两两平行的三条直线,可以确定一个或三个平面,**所以 D 是真命题.**

易错警示 **对基本事实理解不透彻致错**

忽视基本事实 1 中的关键词"不在一条直线上",就容易错选 AB.

2. C 【解析】当 4 条直线中任何 3 条都不共面时,如四棱锥的 4 条侧棱,此时 4 条直线可以确定 6 个平面;

当 4 条直线中有且仅有 3 条共面时,4 条直线可以确定 3+1=4(个)平面;

当 4 条直线共面时,4 条直线只可以确定 1 个平面.

4 条直线在空间中的位置关系:任何 3 条都不共面、有且仅有 3 条共面、4 条均共面,不存在其他的位置关系,**故选 C.**

3. B 【解析】连接 AD_1,BC_1,BD_1.

$\because O\in$ 直线 AE,$AE\subset$ 平面 ABC_1D_1,$\therefore O\in$ 平面 ABC_1D_1.

又$\because O\in$平面BB_1D_1D,平面$ABC_1D_1\cap$平面$BB_1D_1D=BD_1$,

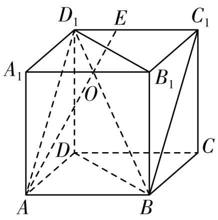
$\therefore O\in$直线BD_1,$\therefore$点D_1,O,B共线.

$\because AB/\!/D_1C_1$,$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle ED_1O$,

$\therefore OB:OD_1=AB:ED_1=3:1$,

$\therefore OB=3OD_1$.

故 B 正确.

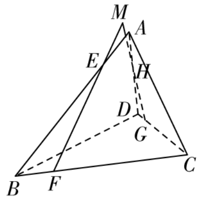


归纳总结 **证明点共线的两种方法**

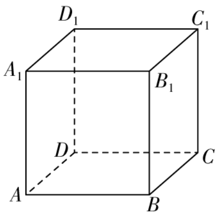
(1)先找出两个平面,然后证明这些点都是这两个平面的公共点,根据基本事实 3 可知这些点都在这两个平面的交线上;

(2)选择其中两点确定一条直线,然后证明其他点也在这条直线上.

4. A 【解析】如图,因为$EF\subset$平面ABC,$GH\subset$平面ACD,所以点$M\in$平面ABC,且$M\in$平面ACD,而平面$ABC\cap$平面$ACD=AC$,所以点$M\in$直线AC.若$M\in$直线BD,那么直线AC和BD有交点,是共面直线,这与几何体$A-BCD$是三棱锥矛盾,所以$M\notin$直线BD.**故 A 正确.**



5. D 【解析】如图,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,直线AA_1,AB,AD两两相交,但AA_1,AB,AD不共面.AB,AD,BC都在平面$ABCD$中,但AD,BC不相交.所以“a,b,c两两相交”是“a,b,c共面”的既不充分也不必要条件.**故 D 正确.**

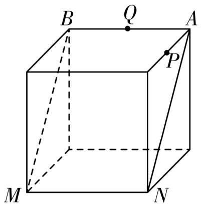


6. D 【解析】显然 P,Q,N 在正方体的上底面，且三点不共线，M 不在正方体的上底面，

所以 P,Q,N,M 四点不共面，**故 A 错误**；

如图①，连接 $MB,NA,MN//BA$，即 A,B,M,N 四点共面，即 Q,M,N 三点共面，且三点不共线，

又 $P\notin$ 平面 $ABMN$，所以 P,Q,N,M 四点不共面，**故 B 错误**；



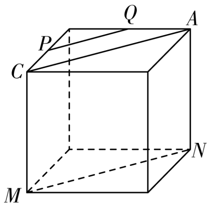
图①

显然 P,M,N 在正方体的下底面，且三点不共线，Q 不在正方体的下底面，

所以 P,Q,N,M 四点不共面，**故 C 错误**；

如图②，连接 AC,PQ,MN，则 $PQ//AC$，又 $AC//MN$，所以 $PQ//MN$，

所以 P,Q,N,M 四点共面，**故 D 正确. 故选 D.**



图②

7.【**证明**】(1) 因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，所以 $EF//AC$. 又因为$\frac{CG}{GD}=\frac{AH}{HD}$，所以 $GH//AC$，所以 $EF//GH$，所以 E,F,G,H 四点共面.

(2) 因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，所以 $EF//AC,EF=\frac{1}{2}AC$.

由题意知$\frac{CG}{GD}=\frac{AH}{HD}=2$，所以 $HG//AC,HG=\frac{1}{3}AC$，所以四边形 $EFGH$ 为梯形，直线 EH 和 FG 必相交，设交点为 M，即 $EH\cap FG=M$.

因为 $EH\subset$ 平面 ABD，所以点 $M\in$ 平面

ABD,同理可得点 $M\in$ 平面 BCD.

又因为平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,所以点 $M\in$ 直线 BD,所以直线 EH,FG,BD 三线共点.

8.4.2 空间点、直线、平面之间的位置关系

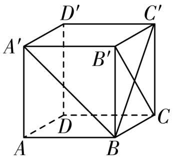
对点上分

1. D 【解析】对于 A,空间中两直线的位置关系有三种:平行、相交和异面,**A 错误**.

对于 B,若空间中两直线没有公共点,则两直线异面或平行,**故 B 错误**.

对于 C,和两条异面直线都相交的两直线是异面直线或相交直线,**故 C 错误**.

对于 D,如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$A'B,B'C,BC'$ 为正方体侧面的对角线,$A'B$ 与 BC' 相交,$A'B$ 与 $B'C$ 异面,故若两直线分别是正方体的相邻两个面的对角线所在的直线,则两直线可能相交,也可能异面,**故 D 正确**.



易错警示 **错误理解异面直线定义致错**

异面直线的定义是不同在任何一个平面内的两条直线,容易理解片面出现误选的情况,如将异面直线理解为"空间中不相交的两条直线""分别位于不同平面内的两条直线""一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线"都是错误的.

2. D 【解析】因为 $\alpha\cap\beta=l$,所以 $l\subset\alpha$,$l\subset\beta$,则 l 与 m 平行或相交,l 与 n 平行或相交,又 m,n 为异面直线,所以 l 不能与 m,n 同时平行,即 l 与 m,n 可能都相交,也可能与其中一条相交,**故 D 正确**.

3. CD 【解析】由题意可知 M 为 DD_1 的中点,故 $DD_1\cap C_1M=M$,$C_1M\cap CC_1=C_1$,故 DD_1,CC_1 均与 C_1M 相交,**A,B 错误**.

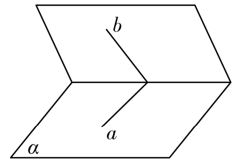
$BD_1 \cap$ 平面 $CC_1D_1D = D_1$，$C_1M \subset$ 平面 CC_1D_1D，$D_1 \notin$ 直线 C_1M，则直线 BD_1 与 C_1M 为异面直线，同理可说明 CA_1 与直线 C_1M 为异面直线，**故 C，D 正确.**

4. A 【解析】由线面位置关系可知，若点 $A \in \alpha$，点 $B \notin \alpha$，则直线 AB 与 α 相交，**故 A 正确.**

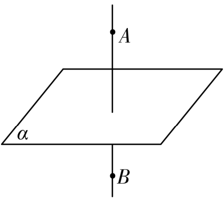
如图①所示，**故 B 错误.**

如图②所示，**故 C 错误.**

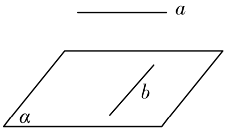
如图③所示，**故 D 错误. 故选 A.**



图①

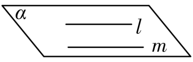


图②

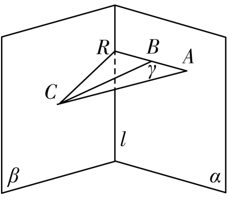


图③

5. C 【解析】①**正确**；②**错误**，如图所示，$l//m$，而 $m \subset \alpha$，$l \subset \alpha$；③**正确**；④**错误**，另一条直线还可能与这个平面相交. 由此可知，①③**正确，故选 C.**



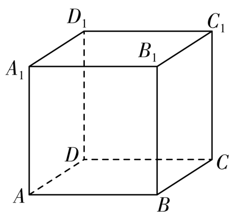
6. C 【解析】连接 CR，AC，BC，平面 ABC 即为平面 γ. 因为直线 AB 与直线 l 相交于点 R，所以 $R \in l$，因为平面 α 与平面 β 相交于直线 l，所以 $R \in$ 平面 β，又点 C 在平面 β 上，所以 $CR \subset$ 平面 β，因为 $AB \subset$ 平面 γ，点 R 在直线 AB 上，所以 $R \in$ 平面 γ，又 $C \in$ 平面 γ，所以 $CR \subset$ 平面 γ，所以 β 与 γ 的交线是直线 CR. **故 C 正确.**



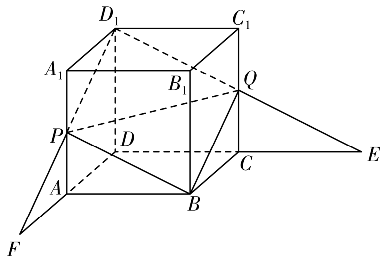
7. BD 【解析】因为 $\alpha // \beta$，$a \subset \alpha$，所以 $a // \beta$，**故 B 正确**，**D 正确**；

如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，令 A_1B_1 为 a，平面 $ABCD$ 为 β，平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为 α，则 $\alpha // \beta$，$a \subset \alpha$，显然 β 内

的直线 BC 与 α 不平行,直线 AB 与 α 平行,**故 A 错误,C 错误. 故选 BD.**



8. B 【解析】连接 PB,QB,如图.



因为 P,Q 分别是棱 AA_1,CC_1 的中点,所以 $D_1P /\!/ BQ$ 且 $D_1P=BQ$,所以四边形 D_1PBQ 是平行四边形,所以 D_1,P,B,Q 四点共面,即 $B\in$ 平面 D_1PBQ. 又 $B\in$ 平面 $ABCD$,所以 $B\in l$,**故 A 正确,B 错误.**

如图,延长 D_1P 与 DA 的延长线交于点 F,延长 D_1Q 与 DC 的延长线交于点 E. 因为 $D_1F\subset$ 平面 D_1PBQ,所以 $F\in$ 平面 D_1PBQ. 因为 $DF\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $F\in$ 平面 $ABCD$,所以 $F\in l$,同理 $E\in l$,**故 C,D 正确.**

8.4 节测上分

1. C 【解析】对于 A,$A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta$,根据直线上有两个点在平面内,则这条直线在这个平面内,可得 $\alpha\subset\beta$,**故 A 正确;**

对于 B,$M\in\alpha,M\in\beta,N\in\alpha,N\in\beta$,根据直线上有两个点在平面内,则这条直线在这个平面内,可得直线 $MN\subset\alpha$,直线 $MN\subset\beta$,**故 B 正确;**

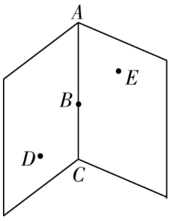
对于 C,由 $A\in\alpha,A\in\beta$,知平面 α 和平面 β 相交于一条经过点 A 的直线,**故 C 错误;**

对于 D,$A,B,M\in\alpha,A,B,M\in\beta$,且 A,B,M 不共线,根据不共线的三点确定一个平面,可得 α,β 重合,**故 D 正确.**

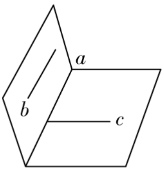
2. A 【解析】对于 A,如果有三点共线,那么共线三点所在直线与直线外一点共

面，这与“不共面的四点”矛盾，故原命题为真命题；

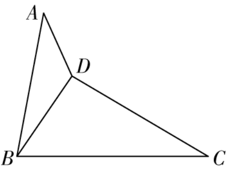
对于B，若点 A,B,C,D 共面，点 A,B,C,E 共面，则 A,B,C,D,E 可能不共面，如图①，平面 $ABCE$ 与平面 $ABCD$ 相交于 A，B，C 所在直线，$E\notin$ 平面 $ABCD$，故原命题为假命题；



图①



图②



图③

对于 C，如图②，直线 a,b 共面，直线 a,c 共面，但直线 b,c 不共面，故原命题为假命题；

对于 D，如图③，空间四边形 $ABCD$ 的四条边相等，但不是菱形，故原命题为假命题.

3. ABD　【解析】由正方体性质知 $AA_1 /\!/ CC_1$，$\therefore A,C,C_1,A_1$ 四点共面，A **正确**；

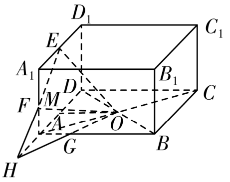
连接 AC，A_1C_1（图略），$\because$ 直线 A_1C 交平面 C_1BD 于点 M，$\therefore M\in$ 平面 C_1BD，$M\in$ 直线 A_1C，又 $A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore M\in$ 平面 ACC_1A_1，$\because O$ 为 DB 的中点，$BD\subset$ 平面 C_1BD，底面 $ABCD$ 为正方形，$\therefore O$ 为 AC 的中点，$O\in$ 平面 C_1BD，且 $O\in$ 平面 ACC_1A_1，又 $C_1\in$ 平面 C_1BD，且 $C_1\in$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore$ 平面 C_1BD 与平面 ACC_1A_1 相交于过点 C_1,M,O 的直线，即 C_1,M,O 三点共线，B **正确**；

平面 $BB_1D_1D\cap$ 平面 $C_1BD=BD$，$M\in$ 平面 C_1BD，但 $M\notin BD$，$\therefore M\notin$ 平面 BB_1D_1D，C **错误**；

连接 A_1B，A_1D（图略），易知三棱锥 A_1-BCD 中，A_1C 与 BD 不共面，否则 A_1,B,C,D 在同一平面内，D **正确**.

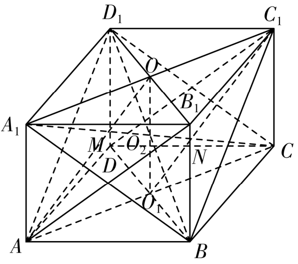
4. B　【解析】延长 EF 交 DA 的延长线于

H，连接 HO 交 AB 于 G.



$\because H\in EF, EF\subset$ 平面 EOF，$H\in AD, AD\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $EOF\cap$ 平面 $ABCD=l$，$\therefore H\in l$，又 $O\in$ 平面 EOF，$O\in$ 平面 $ABCD$，$\therefore O\in l$，故直线 OH 即为直线 l. 取 AD 的中点 M，连接 MO，易知 $\triangle AHF\cong\triangle A_1EF$，$\therefore AH=A_1E=AM$，$\therefore AG=\dfrac{1}{2}MO=\dfrac{1}{4}AB$，$BG=\dfrac{3}{4}AB$，$\therefore AG=\dfrac{1}{3}GB$，即 $k=\dfrac{1}{3}$. **故 B 正确.**

5. C 【解析】连接 A_1C_1，AC，OA，如图，因为 $AA_1/\!/CC_1$，所以 A，A_1，C_1，C 四点共面. 因为 $M\in A_1C$，$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $M\in$ 平面 ACC_1A_1. 又 $M\in$ 平面 AB_1D_1，所以点 M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上，同理 O，A 也在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上，所以 A，O，M 三点共线，**故 A 正确.**



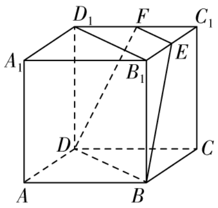
因为直线 A_1C 与平面 BDC_1 的交点为 N，所以点 $N\in A_1C$. 由 A 选项得点 A，A_1，C_1，C 四点共面，所以点 $N\in$ 平面 ACC_1A_1. 由 A 选项得点 $O\in$ 平面 ACC_1A_1，所以 N，O，A_1，A 四点共面，**故 B 正确.**

在矩形 A_1ACC_1 中，点 O 是 A_1C_1 的中点，$A_1C_1=AC$，$\triangle A_1OM\backsim\triangle CAM$，所以 $2A_1M=MC$，即点 M 为线段 A_1C 的三等分点. 设 O_1 为 BD 与 AC 的交点，连接 O_1C_1，同理可得 N 为线段 A_1C 的三等分点，故 M，N 为线段 A_1C 的三等分点，**故 C 错误.**

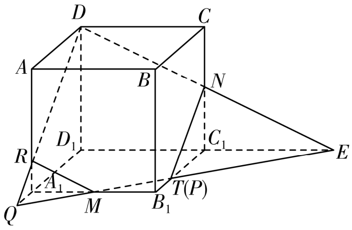
连接 A_1B，D_1C，O_1O，BD_1，设 O_1O 与 BD_1

的交点为 O_2，易得 O_2 为 BD_1 的中点，四边形 A_1D_1CB 是矩形，线段 BD_1，A_1C 是其两条对角线，则 BD_1 的中点也是 A_1C 的中点，即 O_2 为 A_1C 的中点. 又由 C 选项可得 M,N 为线段 A_1C 的三等分点，所以 O_2 也为线段 MN 的中点. 又 $O_2\in BD_1$，$BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $O_2\in$ 平面 BB_1D_1D，**故 D 正确**.

6. 18 【解析】取 C_1D_1 的中点 F，连接 EF，DF，B_1D_1，BD，BE. 因为 E 为 B_1C_1 的中点，所以 $EF\,/\!/\,B_1D_1$，$EF=\dfrac{1}{2}B_1D_1$. 因为 $BD\,/\!/\,B_1D_1$，$BD=B_1D_1$，所以 $EF\,/\!/\,BD$，$EF=\dfrac{1}{2}BD$，所以 B,D,E,F 四点共面，即过 B，D，E 三点的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为梯形 $BDFE$. 因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，所以 $EF=2\sqrt{2}$，$BD=4\sqrt{2}$，$BE=DF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以等腰梯形 $BDFE$ 的高为 $\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$，所以梯形 $BDFE$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times 3\sqrt{2}=18$.



7. 【解】(1) 如图所示，连接 DN 并延长交 D_1C_1 的延长线于点 E，连接 ME 交 B_1C_1 于点 T，延长 EM 交 D_1A_1 的延长线于点 Q，连接 DQ 交 AA_1 于点 R，连接 RM，TN，则五边形 $DRMTN$ 即为过点 D,M,N 的截面. 如图所示，平面 $DRMTN$ 与平面 BB_1C_1C 的交线为 TN，平面 $DRMTN$ 与平面 AA_1B_1B 的交线为 RM.



(2)由(1)可知,点 T 即点 P,由 N 为 CC_1 的中点,易得 $\triangle DCN \cong \triangle EC_1N$,所以 $DC = EC_1 = 4$. 易知 $\triangle MB_1P \backsim \triangle EC_1P$,所以 $\frac{MB_1}{EC_1} = \frac{B_1P}{C_1P} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,所以 $C_1P = \frac{2}{3}B_1C_1 = \frac{2}{3}\times 4 = \frac{8}{3}$,$B_1P = \frac{1}{3}\times 4 = \frac{4}{3}$,所以 $PN = \sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$,$PM = \sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$,所以 $PM + PN = \frac{10+2\sqrt{13}}{3}$.

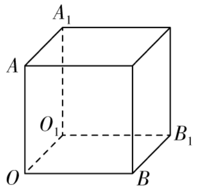
8.5 空间直线、平面的平行

8.5.1 直线与直线平行+

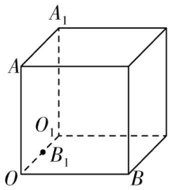
8.5.2 直线与平面平行

对点上分

1. D 【解析】在正方体中,如图①所示,$OB /\!/ O_1B_1$,如图②所示,OB 与 O_1B_1 不平行. **故 D 正确.**



图①



图②

2. ④ 【解析】对于①,这两个角相等或互补,①**错误**;对于②③,无法判定这两个角的两边分别平行,所以无法确定这两个角的关系,②③**错误**;对于④,根据平行线的传递性可以判断,④**正确**.

3. D 【解析】对于 A,由条件可得,$MQ /\!/ BD$,$NP /\!/ BD$,所以 $MQ /\!/ NP$,所以 M,N,P,Q 四点共面,**故 A 正确**;

对于 B,$MQ /\!/ BD$,$ME /\!/ BC$,根据等角定理,得 $\angle QME = \angle DBC$,**故 B 正确**;

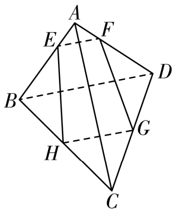
对于 C,由等角定理知 $\angle QME = \angle DBC$,$\angle MEQ = \angle BCD$,所以 $\triangle BCD \backsim \triangle MEQ$,**故 C 正确**;

对于 D,由三角形中位线的性质知 $MQ /\!/$

$BD, MQ=\frac{1}{2}BD, NP /\!/ BD, NP=\frac{1}{2}BD$，所以 $MQ /\!/ NP, MQ=NP$，所以四边形 $MNPQ$ 为平行四边形，**故 D 错误**.

4. D 【解析】若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，当这无数条直线是平行线时，l 可能在平面内，与 α 不一定平行，**故 A 不正确**；若直线 a 在平面 α 外，则 $a /\!/ \alpha$ 或 a 与 α 相交，**故 B 不正确**；若直线 $a /\!/ b, b \subset \alpha$，则 $a /\!/ \alpha$ 或 $a \subset \alpha$，**故 C 不正确**；若直线 $a /\!/ b, b \subset \alpha$，则 $a /\!/ \alpha$ 或 $a \subset \alpha$，$\therefore a$ 平行于平面 α 内的无数条直线，**故 D 正确**.

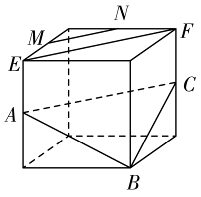
5. B 【解析】如图所示，在平面 ABD 内，$\because AE : EB = AF : FD = 1 : 3$，$\therefore EF /\!/ BD$. 又 $BD \subset$ 平面 BCD，$EF \not\subset$ 平面 BCD，$\therefore EF /\!/$ 平面 BCD. 又在平面 BCD 内，H, G 分别是 BC, CD 的中点，$\therefore HG /\!/ BD$，$\therefore HG /\!/ EF$. 又 $\frac{EF}{BD}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}, \frac{HG}{BD}=\frac{CH}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore EF \neq HG$. 在四边形 $EFGH$ 中，$EF /\!/ HG$ 且 $EF \neq HG$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为梯形. **故 B 正确**.



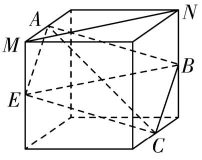
6. D

> **攻略上分** 本题为判断线面平行问题，可利用通法攻略 26 求解. 前三个选项均先证明线线平行，再利用线面平行的判定定理求解.

【解析】对于 A，如图①所示，连接 EF，易得 $AC /\!/ EF$，$MN /\!/ EF$，则 $MN /\!/ AC$，又 $MN \not\subset$ 平面 ABC，$AC \subset$ 平面 ABC，所以 $MN /\!/$ 平面 ABC，**故 A 满足**；



图①

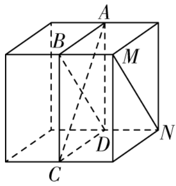


图②

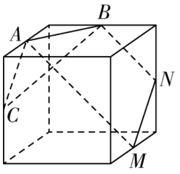
对于 B，如图②所示，设 E 为所在棱的中

点，连接 EA，EC，EB，易知 $AE=BC$，$AE//BC$，所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形，A，B，C，E 四点共面，又易知 $MN//BE$，$MN\not\subset$ 平面 ABC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $MN//$ 平面 ABC，**故 B 满足**；

对于 C，如图③所示，设 D 为所在棱的中点，连接 DA，DC，DB，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形，A，B，C，D 四点共面，且易知 $MN//BD$，又 $MN\not\subset$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，所以 $MN//$平面 ABC，**故 C 满足**；



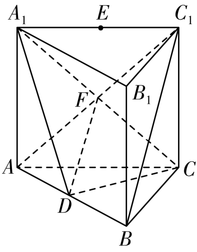
图③



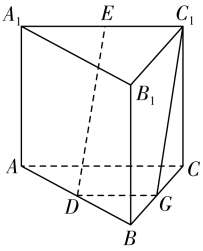
图④

对于 D，如图④所示，连接 AM，BN，由已知及正方体的性质可知四边形 $AMNB$ 是等腰梯形，所以 AB 与 MN 所在的直线相交，又 $AB\subset$平面 ABC，故不能推出 MN 与平面 ABC 平行，**故 D 不满足. 故选 D.**

7. AB 【解析】对于 A，如图①，连接 AC_1，交 A_1C 于点 F，连接 DF，则点 F 是 AC_1 的中点，因为 D 是 AB 的中点，所以 $DF//BC_1$，又 $DF\subset$ 平面 A_1DC，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1DC，所以 $BC_1//$平面 A_1DC，**故 A 正确.**



图①



图②

对于 B，如图②，取 BC 的中点 G，连接 DG，C_1G，因为 D 是 AB 的中点，

所以 $DG//AC$，且 $DG=\dfrac{1}{2}AC$，又 $EC_1=\dfrac{1}{2}A_1C_1=\dfrac{1}{2}AC$，$EC_1//AC$，所以 $DG//EC_1$，$DG=EC_1$，所以四边形 DGC_1E 是平行四边形，所以 $DE//C_1G$，又 $DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$C_1G\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $DE//$平面 BCC_1B_1，**故 B 正确.**

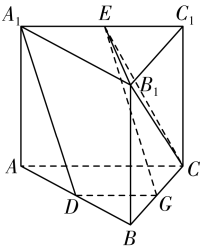
对于 C，如图③，取 BC 的中点 G，连接

DG，EG，因为 D 是 AB 的中点，

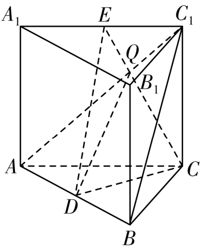
所以 $DG /\!/ AC$，且 $DG=\frac{1}{2}AC$，又 $A_1E=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，$A_1E /\!/ AC$，

所以 $DG /\!/ A_1E$，$DG=A_1E$，所以四边形 $DGEA_1$ 是平行四边形，

所以 $A_1D /\!/ EG$，显然 EG 与平面 B_1EC 相交，**故 C 错误**.



图③



图④

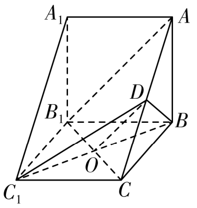
对于 D，如图④，连接 AC_1 交 EC 于点 Q，连接 DQ，则平面 $ABC_1\cap$ 平面 $CDE=DQ$，若 $BC_1 /\!/$ 平面 CDE，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，则 $DQ /\!/ BC_1$，

由于 D 是 AB 的中点，所以点 Q 是 AC_1 的中点，

而显然点 Q 不是 AC_1 的中点，矛盾，**故 D 错误**.

8. (1)【**解**】因为侧棱 AA_1 与底面 ABC 垂直，所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以侧面 BCC_1B_1，BAA_1B_1，CAA_1C_1 均为矩形. 因为 $AB\perp BC$，所以底面 ABC，$A_1B_1C_1$ 均为直角三角形. 因为 $AA_1=AB=2$，$BC=3$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积为 $(AB+BC+AC)\cdot AA_1+2\times\frac{1}{2}AB\cdot BC=(2+3+\sqrt{13})\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times3=16+2\sqrt{13}$.

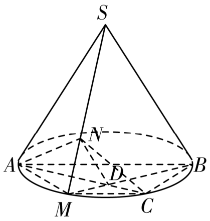
(2)【**证明**】如图，连接 B_1C 交 BC_1 于点 O，连接 OD. 因为四边形 BCC_1B_1 为矩形，所以 O 为 B_1C 的中点. 因为 D 为 AC 的中点，所以 $OD /\!/ AB_1$，因为 $AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D，$OD\subset$ 平面 BC_1D，所以 $AB_1 /\!/$ 平面 BC_1D.



9. C 【解析】当 $m/\!/l$ 时，m 可能在 α 内或者 β 内，故不能推出 $m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$，所以充分性不成立；当 $m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$ 时，设存在直线 $n\subset\alpha$，$n\not\subset\beta$，且 $n/\!/m$，因为 $m/\!/\beta$，所以 $n/\!/\beta$，根据直线与平面平行的性质定理，可知 $n/\!/l$，所以 $m/\!/l$，即必要性成立，故“$m/\!/l$”是“$m/\!/\beta$ 且 $m/\!/\alpha$”的必要不充分条件，**故 C 正确.**

10. C 【解析】由于几何体 $A_1B_1C_1-ABC$ 是三棱台，则 $AB/\!/A_1B_1$，又 $AB\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，$A_1B_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AB/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$. 当 $AB\subset$ 平面 α，平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=m$ 时，由直线与平面平行的性质定理可知 $m/\!/AB$，**故 C 正确.**

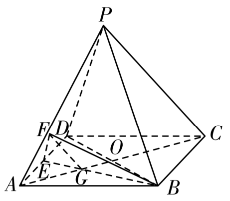
11. B 【解析】如图，连接 MB 交 AC 于点 D，连接 ND，NA，NC，则平面 NAC 即为平面 α.



因为 $SB/\!/\alpha$，平面 $SMB\cap\alpha=DN$，$SB\subset$ 平面 SMB，所以 $SB/\!/DN$. 因为 AB 为底面圆的直径，点 M，C 将弧 AB 三等分，连接 AM，CM，所以 $\angle ABM=\angle BMC=\angle MBC=\angle BAC=30°$，$MC=BC=\dfrac{1}{2}AB$，所以 $MC/\!/AB$，所以 $\dfrac{DM}{DB}=\dfrac{MC}{AB}=\dfrac{1}{2}$. 又 $SB/\!/DN$，所以 $\dfrac{MN}{SN}=\dfrac{DM}{DB}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{SM}{SN}=\dfrac{3}{2}$. **故 B 正确.**

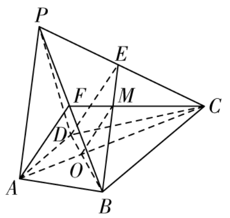
12. 3 【解析】设 AO 与 BE 交于点 G，连接 FG，如图所示. 因为 E 为 AD 的中点，则 $AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$. 由四边形 $ABCD$ 是菱形，可得 $AD/\!/BC$，则 $\triangle AEG\backsim\triangle CBG$，所以 $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{3}$. 又因为

PC // 平面 BEF, $PC\subset$ 平面 PAC, 平面 $BEF\cap$ 平面 $PAC=GF$, 所以 GF // PC,所以 $\lambda=\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{AC}{AG}=3$.



13. 【证明】(1)$\because BC/\!/AD$, $AD\subset$ 平面 PAD, $BC\not\subset$ 平面 PAD, $\therefore BC$ // 平面 PAD. $\because BC\subset$ 平面 PBC, 平面 $PBC\cap$ 平面 $PAD=l$, $\therefore BC/\!/l$. $\because BC\subset$ 平面 $ABCD$, $l\not\subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore l/\!/$平面 $ABCD$.

(2)连接 AC, FC, 设 $AC\cap BD=O$, $FC\cap BE=M$, 连接 OM, 如图. $\because AF$ // 平面 BDE, $AF\subset$ 平面 AFC, 平面 $AFC\cap$ 平面 $BDE=OM$, $\therefore AF/\!/OM$. $\because AD/\!/BC$, $AD=\dfrac{1}{2}BC$, $\therefore \dfrac{AO}{OC}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \dfrac{FM}{MC}=\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore$ 点 M 是 $\triangle PBC$ 的重心, $\therefore$ 点 E 是 PC 的中点, $\therefore \dfrac{EM}{MB}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{DO}{OB}$, $\therefore OM/\!/DE$, $\therefore AF/\!/DE$.



能力上分

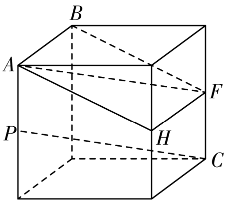
1. D 【解析】设平面 PAB 内存在直线 m 与 DC 平行, 因为 $DC\not\subset$ 平面 PAB, $m\subset$ 平面 PAB, 所以 $DC/\!/$平面 PAB, 又 $DC\subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAB=AB$, 所以 $DC/\!/AB$, 与题干矛盾, 即在平面 PAB 内不存在直线与 DC 平行, **故①正确**;

设平面 $PAB\cap$ 平面 $PDC=l$, 则 $l\subset$ 平面 PAB, 所以在平面 PAB 内存在无数条直线与直线 l 平行, 这无数条直线与平面 PDC 平行, **故②正确**;

设平面 PAB 与平面 PDC 的交线 $l/\!/$平面 $ABCD$, 又 $l\subset$ 平面 PAB, 平面 $PAB\cap$ 平面

$ABCD=AB$，所以 $l//AB$，同理可得 $l//CD$，则 $AB//CD$，与题干矛盾，即平面 PAB 与平面 PDC 的交线与底面 $ABCD$ 不平行，故③正确. 故选 D.

2. C 【解析】如图，设 H,F 为所在棱的中点，连接 AH,HF,FB,AF.



易知四边形 $APCF$ 为平行四边形，所以 $AF//PC$，又 $AF\subset$ 平面 $ABFH$，$PC\not\subset$ 平面 $ABFH$，所以 $PC//$ 平面 $ABFH$，则平面 $ABFH$ 为平面 α，平面 α 截正方体所得图形为四边形 $ABFH$.

因为正方体棱长为 2，所以 $AH=BF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AB=HF=2$，$AF=PC=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

所以 $AH^2+HF^2=AF^2$，则 $AH\perp HF$，

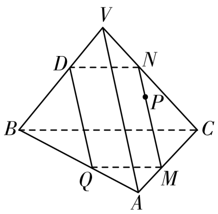
又 $AB \perp\!\!\!\!= HF$，所以四边形 $ABFH$ 为矩形，

所以 $S_{四边形ABFH}=AH\cdot HF=\sqrt{5}\times 2=2\sqrt{5}$. 故选 C.

3. A

思路导引 作出示意图，由线面平行的性质定理得到线线平行关系，结合题意可求得 VA 的长，进而求得正四面体木块的表面积.

【解析】作出截面如图所示.



因为截面平行于直线 VA,BC，由线面平行的性质定理可得 $VA//MN$，$DQ//VA$，$ND//BC$，$BC//QM$，所以 $DQ//MN$，$ND//QM$，从而截面 $MNDQ$ 是平行四边形，所以 $\frac{MN}{VA}=\frac{CN}{VC}$，$\frac{DN}{BC}=\frac{DN}{VC}=\frac{VN}{VC}$，

又 $\frac{CN}{VC}+\frac{VN}{VC}=1$，$VA=VC$，

所以 $MN+ND=VA$.

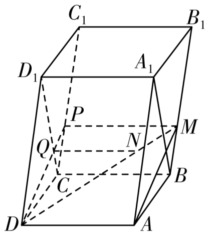
又因为截面的周长为 4，所以 $2VA=4$，所

以 $VA=2$,

所以正四面体木块 $V-ABC$ 的表面积为

$4\times S_{\triangle ABC}=4\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. **故选 A.**

4. C 【解析】连接 AM,设平面 DAM 与 CC_1 交于点 P,连接 DP 交 D_1C 于点 Q,连接 QN,PM,如图.



因为 $CB/\!/DA$,$CB\not\subset$平面 $DAMP$,$DA\subset$平面 $DAMP$,

所以 $CB/\!/$平面 $DAMP$,又 $CB\subset$平面 CBB_1C_1,平面 $DAMP\cap$平面 $CBB_1C_1=PM$,所以 $CB/\!/PM$.

因为 M 是 BB_1 上靠近 B 的三等分点,所以 $\frac{CC_1}{CP}=\frac{BB_1}{BM}=3$. 因为 $CB\subset$平面 CBA_1D_1,$PM\not\subset$平面 CBA_1D_1,所以 $PM/\!/$平面 CBA_1D_1,

又 $PM\subset$平面 $PDAM$,平面 $CBA_1D_1\cap$平面 $PDAM=QN$,所以 $PM/\!/QN$,

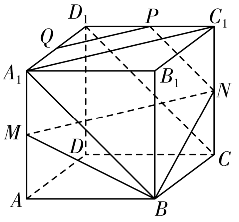
所以$\frac{DN}{MN}=\frac{DQ}{PQ}=\frac{DD_1}{CP}=\frac{CC_1}{CP}=3$,故$\frac{DN}{DM}=\frac{3}{4}$.

故选 C.

5. ACD

思路导引 根据平行线的传递性可得 $PQ/\!/MN$,结合线面平行的判定定理即可判断 A;证明 A_1,B,N,P 四点共面,可知当点 Q 与点 A_1 重合时,B,N,P,Q 四点共面即可判断 B;得到 $D_1A_1/\!/$平面 BCN,结合三棱锥体积公式判断 C;利用补形法将经过 C,M,B,N 四点的球转化为长方体的外接球,求出外接球的表面积即可判断 D.

【解析】如图①所示,连接 PQ,A_1C_1,当 Q 是 D_1A_1 的中点时,$PQ/\!/A_1C_1$,$A_1C_1/\!/MN$,所以 $PQ/\!/MN$. 因为 $PQ\not\subset$平面 BMN,$MN\subset$平面 BMN,所以 $PQ/\!/$平面 BMN,**故 A 正确.**

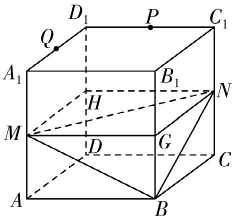


图①

对于 B，如图①所示，连接 PN, A_1B, CD_1，因为 N, P 分别是 CC_1, C_1D_1 的中点，所以 $CD_1 // PN$，又 $CD_1 // A_1B$，所以 $A_1B // PN$，所以 A_1, B, N, P 四点共面，即当点 Q 与点 A_1 重合时，B, N, P, Q 四点共面，**故 B 错误**.

对于 C，因为几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，所以 $D_1A_1 //$ 平面 BCN，直线 D_1A_1 上的点到平面 BCN 的距离为 2，而 $S_{\triangle BCN}=1$，所以 $V_{Q-BCN}=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$，故三棱锥 $Q-BCN$ 的体积是定值，**故 C 正确**.

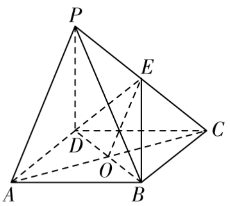
对于 D，如图②所示，设 G, H 分别为 BB_1, DD_1 的中点，连接 MG, GN, MH, NH，则几何体 $ABCD-MGNH$ 为长、宽、高分别为 2，2，1 的长方体，根据补形法知，经过 C, M, B, N 四点的球即为长方体 $ABCD-MGNH$ 的外接球，所求球的直径 $2R$ 满足 $(2R)^2=2^2+2^2+1^2=9$，故经过 C, M, B, N 四点的球的表面积为 $4\pi R^2=9\pi$，**故 D 正确. 故选 ACD.**



图②

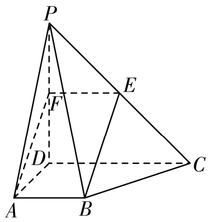
6. (1)【**解**】E 是 PC 的中点，理由如下：

如图①，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE，由底面 $ABCD$ 是正方形，得 O 是 AC 的中点. 而 $PA //$ 平面 EBD，$PA \subset$ 平面 PAC，平面 $PAC \cap$ 平面 $BDE=OE$，于是 $PA // OE$. 在 $\triangle APC$ 中，O 是 AC 的中点，所以 E 是 PC 的中点.



图①

(2)【证明】如图②，取 PD 的中点 F，连接 AF,EF. 由 E 是 PC 的中点，得 $EF/\!/CD$，$EF=\frac{1}{2}CD$. 又 $AB/\!/CD$，$AB=\frac{1}{2}CD$，所以 $EF/\!/AB$，$EF=AB$，则四边形 $ABEF$ 是平行四边形，于是 $BE/\!/AF$，又 $AF\subset$ 平面 PAD，$BE\not\subset$ 平面 PAD，所以 $BE/\!/$ 平面 PAD.



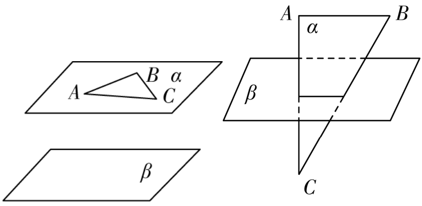
图②

(3)【解】存在. 由(1)知，E 为 PC 中点，则 $V_{E-BPD}=\frac{1}{2}V_{C-BPD}=\frac{1}{2}V_{P-DBC}$，当 $V_{E-BPD}=\frac{4}{3}$ 时，$V_{P-DBC}=\frac{8}{3}$，而 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=\lambda CD=2\lambda$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，因此 $V_{P-DBC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot 2\lambda=\frac{1}{3}\times2\times2\lambda=\frac{8}{3}$，解得 $\lambda=2$，所以存在 $\lambda=2$，使三棱锥 $E-BPD$ 的体积为 $\frac{4}{3}$.

8.5.3 平面与平面平行

对点上分

1. CD 【解析】对于 A，α 内不共线的三点到 β 的距离都相等，可得 $\alpha/\!/\beta$ 或 α 与 β 相交，如图，**故 A 错误**；

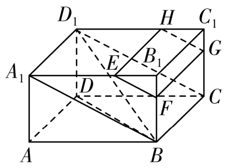


对于 B，a,b 是 α 内的两条直线，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，若 a 与 b 相交，则 $\alpha/\!/\beta$，若 $a/\!/b$，则不一定有 $\alpha/\!/\beta$，**故 B 错误**；

对于 C，因为 a,b 是两条相交直线，所以过 a,b 有唯一平面 γ，由 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，得 $\gamma/\!/\alpha$，又因为 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，所以 $\gamma/\!/\beta$，故 $\alpha/\!/\beta$，**故 C 正确**；

对于 D,过直线 b 作平面 γ' 交平面 α 于直线 c(图略),因为 $b/\!/\alpha$,所以 $b/\!/c$,因为 $b/\!/\beta$,$c\not\subset\beta$,所以 $c/\!/\beta$,因为 a,b 是异面直线,所以 a,c 是异面直线,在 c 上取一点 A,过点 A 在平面 α 内作直线 $a'/\!/a$,则 $a'/\!/\beta$,又 $a'\subset\alpha$,$c\subset\alpha$,$a'\cap c=A$,所以 $\alpha/\!/\beta$,**故 D 正确.**

2. A 【解析】如图所示,连接 A_1B,D_1C,BD,BD_1.



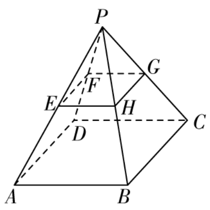
根据题意,由 $\frac{A_1E}{EB_1}=\frac{BF}{FB_1}=2$ 可得 $EF/\!/A_1B$,且 $\frac{EF}{A_1B}=\frac{B_1F}{BB_1}=\frac{B_1E}{A_1B_1}=\frac{1}{3}$. 同理可得 $GH/\!/CD_1$,$FG/\!/BC$,且 $\frac{GH}{CD_1}=\frac{1}{3}$. 由 $GH/\!/CD_1$,$CD_1\cap BD_1=D_1$,知 BD_1 不可能平行于 GH,**故 A 错误.**

易知 BD 与 EF 不平行,且不相交,由异面直线定义可知 BD 与 EF 异面,**故 B 正确.**

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,易知 $A_1B/\!/CD_1$,$A_1B=CD_1$,所以 $EF/\!/GH$,$EF=GH$,即四边形 $EFGH$ 为平行四边形,所以 $EH/\!/FG$,又 $BC/\!/FG$,所以 $EH/\!/BC$,又 $EH\not\subset$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $EH/\!/$平面 $ABCD$,**故 C 正确.**

因为 $EF/\!/A_1B$,$EF\not\subset$平面 A_1BCD_1,$A_1B\subset$平面 A_1BCD_1,所以 $EF/\!/$平面 A_1BCD_1. 又 $BC/\!/FG$,$FG\not\subset$平面 A_1BCD_1,$BC\subset$平面 A_1BCD_1,所以 $FG/\!/$平面 A_1BCD_1. 又 $EF\cap FG=F$,且 $FG,EF\subset$平面 $EFGH$,所以平面 $EFGH/\!/$平面 A_1BCD_1,**故 D 正确. 故选 A.**

3. ABC 【解析】把平面展开图还原为四棱锥如图所示.



对于 A，因为 E,F 分别是 PA,PD 的中点，所以 $EF/\!/AD$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF/\!/$平面 $ABCD$，同理可证 $EH/\!/$平面 $ABCD$，又 $EF\cap EH=E$，EH，$EF\subset$ 平面 $EFGH$，所以平面 $EFGH/\!/$平面 $ABCD$，**故 A 正确；**

对于 B，因为 $BC/\!/AD$，$BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $BC/\!/$平面 PAD，**故 B 正确；**

对于 C，因为 $AB/\!/CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，所以 $AB/\!/$平面 PCD，**故 C 正确；**

对于 D，平面 $PAD\cap$ 平面 $PAB=PA$，**故 D 错误.**

4. $\frac{\sqrt{19}}{2}$ 　**【解析】**如图，在 B_1B,B_1C_1 上取点 E,F，使得 $BB_1=3EB_1$，$B_1C_1=3B_1F$，连接 EF,BC_1,AD_1,A_1E,A_1F.

由题知，$A_1D_1=3D_1N$，则 $A_1N/\!/C_1F$，且 $A_1N=C_1F$，

所以四边形 A_1FC_1N 为平行四边形，所以 $C_1N/\!/A_1F$.

因为 $A_1F\not\subset$ 平面 C_1NM，且 $C_1N\subset$ 平面 C_1NM，所以 $A_1F/\!/$平面 C_1NM.

由 $BB_1=3EB_1$ 且 $B_1C_1=3B_1F$，可得 $EF/\!/BC_1$.

由题知，$AA_1=3AM$ 且 $A_1D_1=3D_1N$，可得 $MN/\!/AD_1$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易得 $AD_1/\!/BC_1$，所以 $EF/\!/MN$.

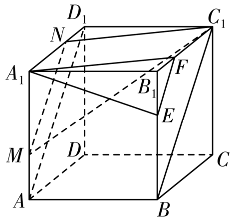
因为 $EF\not\subset$ 平面 C_1MN，$MN\subset$ 平面 C_1MN，所以 $EF/\!/$平面 C_1MN，

又因为 $A_1F\cap EF=F$，且 $A_1F,EF\subset$ 平面 A_1EF，所以平面 $A_1EF/\!/$平面 C_1MN，

因此所求图形的面积为 $\triangle A_1EF$ 的面积.

在等腰三角形 A_1EF 中，$A_1F=A_1E=\sqrt{10}$，$EF=\sqrt{2}$，可得底边 EF 上的高为 $\sqrt{A_1F^2-\left(\frac{EF}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{38}}{2}$，

所以所求图形的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{38}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$.



5.【证明】(1)在△PCD中,由M,N分别为PC,DC的中点,可得$MN/\!/PD$.

因为$MN\not\subset$平面PAD,$PD\subset$平面PAD,所以$MN/\!/$平面PAD. 在平行四边形$ABCD$中,由N,Q分别为CD,AB的中点,可得$NQ/\!/AD$.

因为$NQ\not\subset$平面PAD,且$AD\subset$平面PAD,所以$NQ/\!/$平面PAD.

又因为$MN\cap NQ=N$且MN,$NQ\subset$平面MNQ,所以平面$MNQ/\!/$平面PAD.

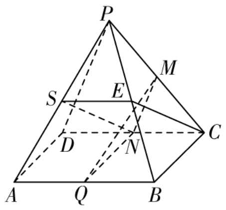
(2)如图,取PB的中点E,连接SE,EC.

在△PAB中,因为S,E分别为PA,PB的中点,所以$SE/\!/AB$且$SE=\frac{1}{2}AB$.

又因为N为DC的中点,所以$CN/\!/AB$且$CN=\frac{1}{2}AB$,所以$SE/\!/CN$且$SE=CN$,

所以四边形$SECN$为平行四边形,所以$SN/\!/CE$.

因为$SN\not\subset$平面PBC,$CE\subset$平面PBC,所以$SN/\!/$平面PBC.



方法总结 面面平行的判定方法

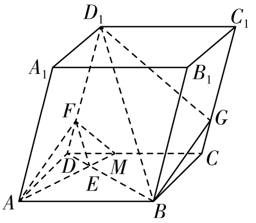
(1)根据判定定理:只需在其中一个平面内找到两条相交的直线,分别证明它们平行于另一个平面,则这两个平面平行.

(2)根据判定定理的推论:在一个平面内找到两条相交的直线分别与另一个平面内两条相交的直线平行,则这两个平面平行.

(3)根据平面平行的传递性:若两个平面都平行于第三个平面,则这两个平面平行.

6. B 【解析】若 $\alpha // \beta$，$\alpha \cap \gamma = l$，$\beta \cap \gamma = m$，则由平面平行的性质定理得 $l // m$；但当 $l // m$，$\alpha \cap \gamma = l$，$\beta \cap \gamma = m$ 时，可能有 $\alpha // \beta$，也可能有 α，β 相交，如 l，m 是三棱柱的两条侧棱所在直线，γ 是 l，m 确定的平面，另两个侧面所在平面分别为 α，β，此时符合条件，而 α，β 相交，所以“$l // m$”是“$\alpha // \beta$”的必要不充分条件. **故 B 正确.**

7. A 【解析】如图，延长 AE 交 CD 于点 M，连接 FM.



由四边形 $ABCD$ 为平行四边形可知 $AB // CD$，则 $\triangle DEM \backsim \triangle BEA$，

则 $\frac{DM}{BA} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{3}$，即 $DM = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}C_1D_1$.

因为平面 $AEF //$ 平面 BD_1G，且平面 $AEF \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = FM$，

平面 $BD_1G \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = D_1G$，所以 $FM // D_1G$.

又 $CC_1 // DD_1$，所以 $\angle DFM = \angle DD_1G = \angle D_1GC_1$.

易知 $\angle FDM = \angle GC_1D_1$，所以 $\triangle FDM \backsim \triangle GC_1D_1$，

则 $\frac{FD}{GC_1} = \frac{DM}{C_1D_1} = \frac{1}{3}$，所以 $C_1G = 3DF = \frac{3}{4}DD_1$，

又 $CC_1 = DD_1$，所以 $\frac{CG}{CC_1} = \frac{1}{4}$，**故选 A.**

方法总结 **应用平面与平面平行的性质定理的一般步骤**

看条件 → 审题看是否有两个平行的平面

找平面 → 找(或作)第三个平面与已知两个平面相交

定交线 → 确定交线位置

得平行 → 得两条交线互相平行

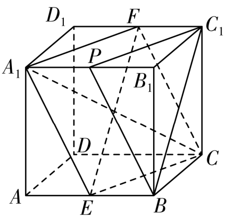
8. BD 【解析】连接 AB，CD（图略）. 当 P 在平面 α 与平面 β 之间时，$\because \alpha // \beta$，平面

$PCD\cap\alpha=AB$，平面 $PCD\cap\beta=CD$，$\therefore AB/\!/CD$，可得$\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PB}{BD}$，$\because PA=6,AC=9,PD=8$，$\therefore \dfrac{6}{9}=\dfrac{BD-8}{BD}$，解得 $BD=24$. 当 P 在平面 α 与平面 β 的同侧时，同理可得$\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PD}$，$\because PA=6,AC=9,PD=8$，$\therefore \dfrac{6}{15}=\dfrac{PB}{8}$，解得 $PB=\dfrac{16}{5}$，$\therefore BD=PD-PB=\dfrac{24}{5}$. 综上所述，可得 BD 的长为$\dfrac{24}{5}$或 24. **故 BD 正确.**

9. AB

思路导引 对于选项 A，连接 EF，根据面面平行的性质定理可得 $BC_1/\!/EF$，进而可证线面平行；对于选项 B，根据面面平行的性质定理得 $A_1F/\!/PC_1$，结合题干证得四边形 A_1PC_1F 为平行四边形，从而证明 F 为棱 C_1D_1 的中点；对于选项 C，D，先确定截面 A_1ECF 为菱形，然后根据菱形面积公式求出该截面的面积.

【解析】如图，连接 EF，因为平面 $PBC_1/\!/$截面 A_1ECF，平面 $PBC_1\cap$平面 $FC_1BE=BC_1$，截面 $A_1ECF\cap$平面 $FC_1BE=EF$，所以 $BC_1/\!/EF$，又 $EF\subset$截面 A_1ECF，而 $BC_1\not\subset$截面 A_1ECF，所以 $BC_1/\!/$截面 A_1ECF，**故 A 正确.**

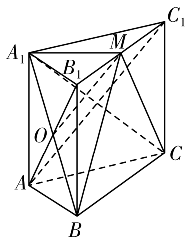


因为平面 $PBC_1/\!/$截面 A_1ECF，平面 $PBC_1\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=PC_1$，截面 $A_1ECF\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1F$，所以 $A_1F/\!/PC_1$，又 $C_1F/\!/A_1P$，所以四边形 A_1PC_1F 为平行四边形，所以 $FC_1=A_1P$，又 P 为棱 A_1B_1 的中点，所以 F 为棱 C_1D_1 的中点，**故 B 正确.**

因为 $C_1B/\!/EF$，$FC_1/\!/EB$，所以四边形 FC_1BE 为平行四边形，

所以 $FC_1=EB$，又 F 为 D_1C_1 的中点，所以 E 为 AB 的中点，所以 $A_1F=FC=CE=EA_1=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，又 $A_1F//PC_1//EC$，所以四边形 A_1ECF 为菱形. 连接 A_1C. $EF=C_1B=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，$A_1C=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$，所以截面 A_1ECF 的面积为 $\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}=8\sqrt{6}$，**故 C，D 错误. 故选 AB.**

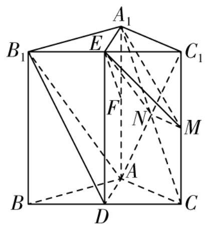
10.【证明】(1)如图，连接 AB_1 与 A_1B 交于点 O，连接 OM. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，所以 O 为 AB_1 的中点. 又因为 M 为 B_1C_1 的中点，所以 $OM//AC_1$. 因为 $OM\subset$ 平面 A_1BM，$AC_1\not\subset$ 平面 A_1BM，所以 $AC_1//$ 平面 A_1BM.



(2)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1B_1C_1//$ 平面 ABC. 因为平面 $A_1BM\cap$ 平面 $ABC=l$，平面 $A_1BM\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1M$，所以 $l//A_1M$. 因为 $A_1M\subset$ 平面 A_1MC，$l\not\subset$ 平面 A_1MC，所以 $l//$ 平面 A_1MC.

能力上分

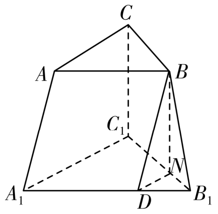
1. ABC　**【解析】**连接 AC_1，ED，如图所示.



由 N 为 AC_1 的中点，且 E 是 B_1C_1 的中点，可知 $EN//AB_1$. 因为 $AB_1\subset$ 平面 ADB_1，$EN\not\subset$ 平面 ADB_1，所以 $EN//$ 平面 ADB_1. 易知四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，D，E 分别为 BC，B_1C_1 的中点，则 $DE//BB_1$，$DE=BB_1$，可得 $DE//AA_1$，$DE=$

AA_1，所以四边形 $ADEA_1$ 是平行四边形，所以 $A_1E// AD$. 又 $AD\subset$ 平面 ADB_1，$A_1E\not\subset$ 平面 ADB_1，则 $A_1E//$ 平面 ADB_1. 又 A_1E，$EN\subset$ 平面 A_1EN，$A_1E\cap EN=E$，所以平面 $A_1EN//$ 平面 ADB_1，**故 D 正确**. 而 EF，A_1M 均与平面 A_1EN 相交，所以 EF，A_1M 均与平面 ADB_1 相交，**故 A，B 错误**. 又 M，N 分别为 CC_1，A_1C 的中点，所以 $MN// AC$，又 AC 与平面 ADB_1 相交，所以 MN 与平面 ADB_1 也相交，所以平面 EMN 与平面 ADB_1 相交，**故 C 错误**.

2. C 【解析】如图，过点 D 作 $DN// A_1C_1$，交 B_1C_1 于点 N，连接 BN. ∵ 在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，点 D 在 A_1B_1 上，且 $AA_1// BD$，$AA_1\cap A_1C_1=A_1$，$BD\cap DN=D$，AA_1，$A_1C_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，BD，$DN\subset$ 平面 BDN，∴ 平面 $BDN//$ 平面 AA_1C_1C. ∵ M 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内（含边界）的一个动点，且有平面 $BDM//$ 平面 AA_1C_1C，∴ M 的轨迹是线段 DN，且 M 与 D 不重合，∴ 动点 M 的轨迹是线段，但只含 1 个端点. **故 C 正确**.



3. ABC 【解析】由三棱柱性质可知平面 $ABC//$ 平面 $A_1B_1C_1$，又平面 $BCHG\cap$ 平面 $ABC=BC$，平面 $BCHG\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=GH$，由面面平行的性质定理可知 $BC// GH$. 由 E，F 分别是 AB，AC 的中点，可知 $BC// EF$，即可得 $EF// GH$，**故 A 正确**.

由 $EF// GH$，$EF\subset$ 平面 A_1EF，$GH\not\subset$ 平面 A_1EF，可得 $GH//$ 平面 A_1EF，**故 B 正确**.

因为 GH 经过 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心，所以 $\frac{GH}{B_1C_1}=\frac{GH}{BC}=\frac{2}{3}$，又 $\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{GH}{EF}=\frac{4}{3}$，**故 C 正确**.

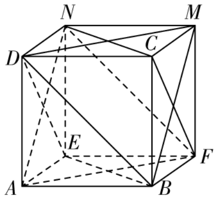
易知 A_1E 与 BB_1 相交，所以平面 A_1EF 与平面 BCC_1B_1 相交，**故 D 错误**.

4. ACD 【解析】展开图可以折成如图所示

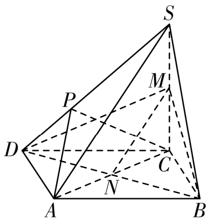
的正方体，在正方体中，连接 AN，$\because AB/\!/MN$，且 $AB=MN$，$\therefore$ 四边形 $ABMN$ 是平行四边形，$\therefore BM/\!/AN$，又$\because AN\subset$平面 DE，$BM\not\subset$平面 DE，$\therefore BM/\!/$平面 DE. 连接 BE，同理可证 $CN/\!/$平面 AF，**故 A 正确，B 错误.**

连接 NF，BD，DM，CF. $\because BM/\!/AN$，$AN\subset$平面 AFN，$BM\not\subset$平面 AFN，$\therefore BM/\!/$平面 AFN，同理可证 $BD/\!/$平面 AFN.

又$\because BM\subset$平面 BDM，$BD\subset$平面 BDM，$BM\cap BD=B$，$\therefore$ 平面 $BDM/\!/$平面 AFN，同理可证平面 $BDE/\!/$平面 NCF，**故 C，D 正确.**



5. (1)【**证明**】如图①所示，连接 BD 交 AC 于点 N，连接 MN，MD，MB. 由题意可知 N 为 AC 的中点，故 $MN/\!/SA$. 又 $SA\not\subset$平面 BDM，$MN\subset$平面 BDM，所以 $SA/\!/$平面 BDM.

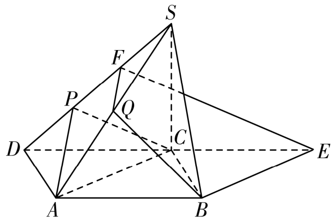


图①

(2)【**解**】存在点 Q，使得 $BQ/\!/$平面 PAC，且 $\frac{SQ}{AQ}=1$. 理由如下：

如图②所示，过点 B 作 $BE/\!/AC$ 交 DC 的延长线于点 E，过点 E 作 $EF/\!/PC$ 交 SD 于点 F，过点 F 作 $FQ/\!/PA$ 交 SA 于 Q，连接 QB. 因为底面 $ABCD$ 为平行四边形，所以 C 为 ED 的中点，则 P 为 DF 的中点. 又 $PS=2PD$，所以 F 为 SP 的中点. 因为 $BE/\!/AC$，$BE\not\subset$平面 PAC，$AC\subset$平面 PAC，所以 $BE/\!/$平面 PAC，同理 $FE/\!/$平面 PAC. 又 $BE\cap EF=E$，BE，$EF\subset$平面 $BEFQ$，所以平面 $PAC/\!/$平面 $BEFQ$. 因为 $BQ\subset$平面 $BEFQ$，所以在侧棱 SA 上存在一点 Q，使

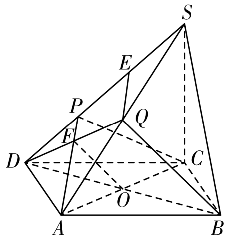
得 $BQ//$平面 PAC，且$\frac{SQ}{AQ}=1$.



图②

一题多解 (2)存在点 Q，使得 $BQ//$平面 PAC，且$\frac{SQ}{AQ}=1$. 理由如下：

如图③所示，连接 BD 交 AC 于点 O，



图③

取 PS 的中点 E，则 $SE=PE=DP$，取 SA 的中点 Q，连接 QB，QE，QD，且 $QD\cap AP=F$，连接 OF. 因为 E 是 PS 的中点，Q 是 SA 的中点，所以 $EQ//PA$，又因为 $PE=PD$，所以 F 是 DQ 的中点. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 O 是 BD 的中点，所以 $OF//BQ$，又 $OF\subset$平面 PAC，$BQ\not\subset$平面 PAC，所以 $BQ//$平面 PAC，所以侧棱 SA 上存在一点 Q，使得 $BQ//$平面 PAC，且$\frac{SQ}{AQ}=1$.

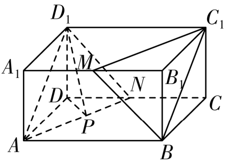
8.5 节测上分

1. D 【解析】若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 m，n 可能平行、相交或异面，**故 A 错误**；若 $m//\alpha$，$m//\beta$，则 $\alpha//\beta$ 或 α，β 相交，**故 B 错误**；若 $m//n$，$m//\alpha$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，**故 C 错误**；若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m//\beta$，**故 D 正确**.

2. D 【解析】由平面 $\alpha//$平面 ABC，平面 $PAB\cap$平面 $\alpha=A'B'$，平面 $PAB\cap$平面 $ABC=AB$，根据面面平行的性质定理可得 $AB//A'B'$，且$\frac{A'B'}{AB}=\frac{PA'}{PA}=\frac{2}{5}$. 同理可得，$BC//B'C'$，$AC//A'C'$. 根据等角定理可得，$\angle B'A'C'=\angle BAC$，$\angle A'B'C'=\angle ABC$，$\angle A'C'B'=\angle ACB$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，所以 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=A'B'^2:$

$AB^2=4:25$. 故 D 正确.

3. A 【解析】如图,取 CD 的中点 N,连接 D_1N,D_1A,AN,易知 $AB/\!/C_1D_1$,$AB=C_1D_1$,所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形,所以 $AD_1/\!/BC_1$,又 $BC_1\subset$平面 BMC_1,$AD_1\not\subset$平面 BMC_1,所以 $AD_1/\!/$平面 BMC_1,同理可得 $AN/\!/$平面 BMC_1,又 $AN\cap AD_1=A$,AN,$AD_1\subset$平面 AD_1N,所以平面 $AD_1N/\!/$平面 BMC_1,又直线 $PD_1/\!/$平面 BMC_1,故 P 在线段 AN 上运动. 易知 $\triangle D_1DP$ 是直角三角形,$S_{\triangle D_1DP}=\frac{1}{2}DP\cdot DD_1$,$DD_1=1$,当 $DP\perp AN$ 时,DP 最小,最小值为 $\frac{1\times2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}$,此时 $\triangle D_1DP$ 的面积最小,最小值为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt5}{5}\times1=\frac{\sqrt5}{5}$,故 A 正确.



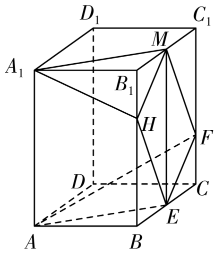
4. 2　1 : 2 【解析】设平面 $AB_1C\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m$,因为 $EF/\!/$平面 AB_1C,$EF\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $EF/\!/m$,又平面 $A_1B_1C_1D_1/\!/$平面 $ABCD$,平面 $AB_1C\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=m$,平面 $AB_1C\cap$平面 $ABCD=AC$,所以 $m/\!/AC$,所以 $EF/\!/AC$,连接 A_1C_1(图略),因为 $A_1C_1/\!/AC$,所以 $EF/\!/A_1C_1$. 又 $AB=2\sqrt2$,E 为 A_1D_1 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt2)^2+(2\sqrt2)^2}=2$.

当 H 为 DD_1 的中点时,连接 A_1D(图略),由 E 为 A_1D_1 的中点,可得 $EH/\!/A_1D$,又 $A_1D/\!/B_1C$,所以 $EH/\!/B_1C$,又 $EH\not\subset$平面 AB_1C,$B_1C\subset$平面 AB_1C,所以 $EH/\!/$平面 AB_1C. 又 $EF/\!/$平面 AB_1C,$EF\cap EH=E$,$EF,EH\subset$平面 EFH,所以平面 $EFH/\!/$平面 AB_1C,所以 $DH:DD_1=1:2$.

5. $\frac{3}{2}$ 【解析】如图,取 B_1C_1 的中点 M,在 BB_1 上取一点 H,使得 $B_1H=\frac{1}{3}BB_1$,连接 A_1M,HM,A_1H,ME,MF,HE,因为 M,E 分别为 B_1C_1,BC 的中点,所以 $A_1A=ME$,$A_1A/\!/ME$,则四边形 A_1AEM 为平行四边

形，所以 $A_1M//AE$，同理可知 $HM//EF$，又 $A_1M\cap HM=M$，$AE\cap EF=E$，A_1M，$HM\subset$ 平面 A_1HM，AE，$EF\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF//$ 平面 A_1HM，则平面 A_1HM 即为平面 α，则过 A_1 且平行于平面 AEF 的平面 α 截四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形是 $\triangle A_1HM$，其中 $B_1H=\dfrac{1}{3}BB_1=1$，$B_1M=1$，$A_1M=A_1H=\sqrt{5}$，$MH=\sqrt{2}$，$\cos\angle MA_1H=\dfrac{A_1M^2+A_1H^2-HM^2}{2\cdot A_1M\cdot A_1H}=\dfrac{4}{5}$，

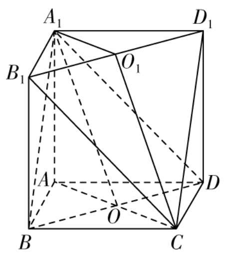
所以 $\sin\angle MA_1H=\dfrac{3}{5}$，$S_{\triangle A_1MH}=\dfrac{1}{2}A_1M\cdot A_1H\cdot\sin\angle MA_1H=\dfrac{3}{2}$.



6.【证明】(1)如图，取 B_1D_1 的中点 O_1，连接 CO_1，A_1O_1. $\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，且四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore A_1O_1//OC$ 且 $A_1O_1=OC$，$\therefore$ 四边形 A_1OCO_1 为平行四边形，$\therefore A_1O//O_1C$.
又 $O_1C\subset$ 平面 B_1CD_1，$A_1O\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore A_1O//$ 平面 B_1CD_1.

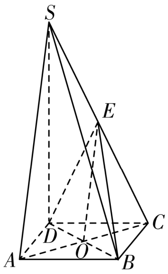
(2)由直四棱柱的性质易知，$BB_1//DD_1$，且 $BB_1=DD_1$，$\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 是平行四边形，$\therefore BD//B_1D_1$. $\because BD\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore BD//$ 平面 B_1CD_1. 由(1)得 $A_1O//$ 平面 B_1CD_1，又 $BD\cap A_1O=O$，BD，$A_1O\subset$ 平面 A_1BD，$\therefore$ 平面 $A_1BD//$ 平面 B_1CD_1.

(3)由(2)得 $BD//$ 平面 B_1CD_1，又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $B_1CD_1\cap$ 平面 $ABCD=l$，$\therefore BD//l$，又 $B_1D_1//BD$，$\therefore B_1D_1//l$.



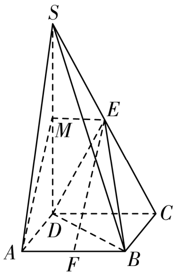
7.【证明】(1)如图①，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE. $\because E$ 为侧棱 SC 的中点，O 是

AC 的中点，$\therefore OE // SA$. $\because SA \not\subset$ 平面 EDB，$OE \subset$ 平面 EDB，$\therefore SA //$ 平面 EDB.



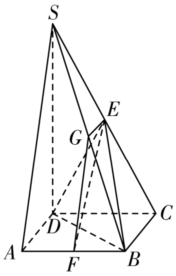
图①

(2) 设 M 为侧棱 SD 的中点，连接 ME，EF，AM，如图②. $\because E$ 为侧棱 SC 的中点，M 为侧棱 SD 的中点，$\therefore ME // DC$，$ME = \frac{1}{2}DC$. $\because AF // DC$，$AF = \frac{1}{2}DC$，$\therefore ME // AF$，$ME = AF$，$\therefore$ 四边形 $AFEM$ 为平行四边形，$\therefore EF // AM$. $\because EF \not\subset$ 平面 SAD，$AM \subset$ 平面 SAD，$\therefore EF //$ 平面 SAD.



图②

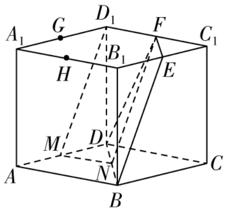
一题多解 (2) 设 G 为侧棱 SB 的中点，连接 EF，GE，GF，如图③. $\because E$ 为侧棱 SC 的中点，G 为侧棱 SB 的中点，$\therefore EG // BC$. $\because AD // BC$，$\therefore EG // AD$. $\because EG \not\subset$ 平面 SAD，$AD \subset$ 平面 SAD，$\therefore EG //$ 平面 SAD. 同理可证 $GF //$ 平面 SAD. 又 $EG \cap GF = G$，且 $EG, GF \subset$ 平面 EFG，$\therefore$ 平面 $EFG //$ 平面 SAD. $\because EF \subset$ 平面 EFG，$\therefore EF //$ 平面 SAD.



图③

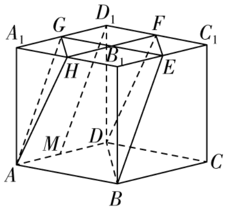
8. (1)【证明】由 E, F 分别为线段 B_1C_1，C_1D_1 的中点，可得 $EF // BD$，所以 B, E, F，D 四点共面. 取线段 BD 的中点 N，连接 MN，NF，如图①. 因为 M, N 分别为线段

DA，DB 的中点，所以 $MN /\!/ AB$，且 $MN=\frac{1}{2}AB$，根据正四棱柱的性质可得 $D_1F /\!/ AB$，且 $D_1F=\frac{1}{2}AB$，所以 $MN /\!/ D_1F$，且 $MN=D_1F$，所以四边形 $MNFD_1$ 为平行四边形，则 $MD_1 /\!/ FN$. 又 $MD_1 \not\subset$ 平面 $BEFD$，$FN \subset$ 平面 $BEFD$，所以 $MD_1 /\!/$ 平面 $BEFD$.



图①

(2)【解】存在点 K，当点 K 与点 A 重合时，平面 $KGH /\!/$ 平面 $BEFD$，理由如下：如图②，连接 GA，HA，GH，GE，HF. 由 G，E 分别为线段 A_1D_1，B_1C_1 的中点可得 $GE /\!/ A_1B_1 /\!/ AB$，且 $GE=A_1B_1=AB$，所以四边形 $ABEG$ 为平行四边形，则 $GA /\!/ EB$. 又 $GA \not\subset$ 平面 $BEFD$，$EB \subset$ 平面 $BEFD$，所以 $GA /\!/$ 平面 $BEFD$，同理可知 $HA /\!/$ 平面 $BEFD$. 又 $GA \cap HA=A$，且 GA，$HA \subset$ 平面 GAH，所以平面 $GAH /\!/$ 平面 $BEFD$，故棱 AA_1 上(含端点)存在点 K，使得平面 $KGH /\!/$ 平面 $BEFD$，此时点 K 即为点 A.



图②

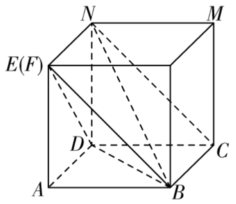
8.6 空间直线、平面的垂直

8.6.1 直线与直线垂直+

8.6.2 直线与平面垂直

对点上分

1. A 【解析】题中正方体的平面展开图所对应的正方体如图所示，其中点 E，F 重合. 不妨设正方体的棱长为 1. 连接 BN，BN 与 CN 所成角为 $\angle BNC$，易知 $CN=\sqrt{2}$，$BN=\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle BNC=\frac{CN}{BN}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\neq\frac{1}{2}$，即 $\angle BNC\neq\frac{\pi}{3}$，故 D 错误；



因为 $AB // CD$,所以 AB 与 CN 所成角为 $\angle NCD = \dfrac{\pi}{4}$,**故 B 错误;**

因为 $BC // AD // FN$, $BC = AD = FN$,所以四边形 $BCNF$ 为平行四边形,所以 $BF // CN$,**故 C 错误;**

连接 BD,因为 $BE // CN$,所以 DE 与 CN 所成角为 $\angle BED$ 或其补角,而 $BE = BD = DE = \sqrt{2}$,则 $\angle BED = \dfrac{\pi}{3}$,因此与 CN 所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的直线是 DE,**故 A 正确. 故选 A.**

名师点拨 求异面直线所成的角,核心是通过平移或者构造等方法将异面直线所成的角转化成同一平面内的两条直线的夹角,放到同一个可解的三角形中求解. 要注意多平面平移,不能局限于一个平面.

2. C

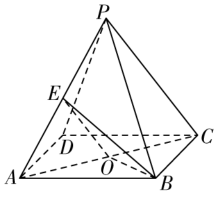
攻略上分 本题利用大招攻略 27 的方法,利用三角形中位线定理构造一条与 PC 平行的直线,找到异面直线 BE 与 PC 所成角或其补角,进而计算求解.

【解析】如图,连接 AC,取 AC 的中点 O,连接 BO, EO,由题意知 $EO // PC$,则异面直线 BE 与 PC 所成角为 $\angle BEO$ 或其补角.

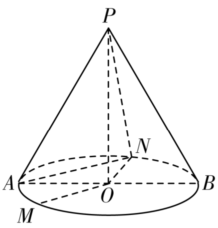
提示: 构造的角可能是钝角, 注意表述

易知在 $\triangle BOE$ 中, $EO = \dfrac{1}{2}PC = 1$, $OB = \dfrac{1}{2}AC = \sqrt{2}$, $BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}PA = \sqrt{3}$,则 $\cos\angle BEO = \dfrac{BE^2 + EO^2 - BO^2}{2BE \cdot EO} = \dfrac{3+1-2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

故异面直线 BE 与 PC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,**故选 C.**

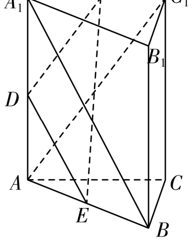


3. D 【解析】如图,过点 A 作 $AN/\!/OM$,交圆 O 于点 N,连接 ON,PN,则 $\angle PAN$ 即为异面直线 OM 与 AP 所成的角或其补角.设 $AO=ON=1$,所以 $\angle OAN=\angle ONA=60°$,则 $AN=1$.因为轴截面 PAB 为等边三角形,所以 $PA=PN=AB=2$.在 $\triangle APN$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle PAN=\dfrac{PA^2+AN^2-PN^2}{2PA\cdot AN}=\dfrac{4+1-4}{2\times2\times1}=\dfrac{1}{4}$,所以异面直线 OM 与 AP 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. **故选** D.



4. B 【解析】如图,分别取 AA_1,AB,A_1C_1 的中点 D,E,F,连接 DE,DF,EF,则 $DE/\!/A_1B,DF/\!/AC_1$,$DE=\dfrac{1}{2}A_1B,DF=\dfrac{1}{2}AC_1$,故异面直线 A_1B 和 AC_1 所成的角为 $\angle FDE$ 或其补角.在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=3,AA_1=4$,则 $DE=\dfrac{1}{2}A_1B=\dfrac{5}{2}$,$DF=\dfrac{1}{2}AC_1=\dfrac{5}{2}$,$EF=\sqrt{4^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

在 $\triangle DEF$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle FDE=\dfrac{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{73}}{2}\right)^2}{2\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=-\dfrac{23}{50}$.因为异面直线 A_1B 和 AC_1 所成角的范围是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以异面直线 A_1B 和 AC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{23}{50}$. **故选** B.

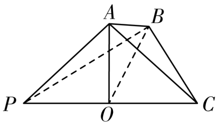


易错警示 **求异面直线所成的角时忽略角的范围致错**

利用平移线段法求异面直线所成的角时，由于异面直线所成角的范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，因此在使用余弦定理时，若所求的角的余弦值为负数，应取绝对值.

5. B 【解析】若两条不同的直线 $a,b\subset$平面 α，且 $l\perp\alpha\Rightarrow l\perp a$，$l\perp b$. 若两条不同的直线 $a,b\subset$平面 α，$a/\!/b$，$l\perp a$，$l\perp b\nRightarrow l\perp\alpha$. 所以“$l\perp a$，$l\perp b$”是“$l\perp\alpha$”的必要不充分条件. **故选** B.

6. D 【解析】连接 OA，OB，如图，由题意知，球 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，设球 O 的半径为 r，则 $V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{32\pi}{3}$，得 $r=2$，由 PC 为球 O 的直径，知 $OP=OC=OA=OB=2$，$\angle PAC=\angle PBC=\dfrac{\pi}{2}$. 在 Rt$\triangle PAC$ 中，$\angle APC=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $AO\perp PC$. 在$\triangle AOB$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，则 $AB^2=AO^2+OB^2$，所以 $AO\perp OB$. 而 PC，$OB\subset$平面 BPC，$PC\cap OB=O$，所以 $AO\perp$平面 BPC. 易知，$PB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，所以三棱锥 $A-PBC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times2\times\dfrac{1}{2}\times2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，即三棱锥 $P-ABC$ 的体积为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **故选** D.



归纳总结 **证明直线与直线垂直的常用方法**

(1)等腰三角形三线合一；

(2)勾股定理的逆定理；

(3)直径所对的圆周角是直角；

(4)线面垂直的性质.

7. 攻略上分 第(2)问利用通法攻略29,先证 $AC\perp CC_1$,结合 $AC\perp BC$,证得 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1,进而得到 $AC\perp BC_1$,然后结合正方形性质和线面垂直的判定定理可证.

【证明】(1)$\because$ 侧面 BCC_1B_1 为正方形,且 $B_1C\cap BC_1=E$,$\therefore E$ 为 B_1C 的中点,

又 D 为 B_1A 的中点,$\therefore DE/\!/AC$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$A_1C_1/\!/AC$,

$\therefore A_1C_1/\!/DE$.

又 $DE\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore DE/\!/$平面 $A_1B_1C_1$.

(2)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$CC_1\perp$ 平面 ABC,

$\because AC\subset$平面 ABC,$\therefore AC\perp CC_1$,

又 $AC\perp BC$,BC,$CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,$BC\cap CC_1=C$,

$\therefore AC\perp$平面 BCC_1B_1.

又 $BC_1\subset$平面 BCC_1B_1,$\therefore AC\perp BC_1$.

$\because$ 侧面 BCC_1B_1 为正方形,$\therefore BC_1\perp B_1C$,

又 $B_1C\cap AC=C$,B_1C,$AC\subset$平面 ACB_1,

$\therefore BC_1\perp$平面 ACB_1.

8. D 【解析】对于 A,若直线 a,b 和平面 α 所成的角相等,则直线 a,b 可以相交或异面或平行,**故 A 错误**;

对于 B,若 $a\perp c$,$b\perp c$,则直线 a,b 可以相交或异面或平行,**故 B 错误**;

对于 C,若 $a\perp\alpha$,$a\perp b$,则 b 与 α 可能平行,也可能 b 在 α 内,**故 C 错误**;

对于 D,若 $a\perp\alpha$,$b\perp\alpha$,由线面垂直的性质定理可得 $a/\!/b$,**故 D 正确. 故选 D.**

9. B 【解析】因为 $MC\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $MC\perp BD$. 连接 AC(图略),若满足 $MA\perp BD$,因为 $MA\cap MC=M$,MA,$MC\subset$ 平面 MAC,所以 $BD\perp$ 平面 MAC. 又因为 $AC\subset$平面 MAC,所以 $BD\perp AC$. 故当 $BD\perp AC$ 时,$AC\cap MC=C$,AC,$MC\subset$平面 MAC,则 $BD\perp$平面 MAC,又 $MA\subset$平面 MAC,所以 $MA\perp BD$. 所以当 $BD\perp AC$ 时,即可推出 $MA\perp BD$,所以四边形 $ABCD$ 为菱形. **故选 B.**

10. (1)【证明】取 AB 的中点 H，连接 EH,HD，

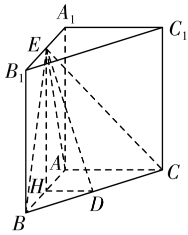
在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 BC,A_1B_1 的中点，

故 $EH//BB_1$，$DH//AC$，又因为 $BB_1\perp AB$，$AB\perp AC$，所以 $AB\perp EH$，$AB\perp HD$.

因为 $EH\cap HD=H$，$EH,HD\subset$ 平面 EHD，

故 $AB\perp$ 平面 EHD，因为 $DE\subset$ 平面 EHD，

所以 $AB\perp DE$.



(2)【解】因为 $BB_1\perp$ 平面 ABC，$EH//BB_1$，

所以 $EH\perp$ 平面 ABC，

则三棱锥 $A-BCE$ 的体积 $V_{A-BCE}=V_{E-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot EH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times3=2.$

11. B

攻略上分 本题为求点到平面的距离，利用通法攻略 31 中的转化法，借助几何体的体积即可求解.

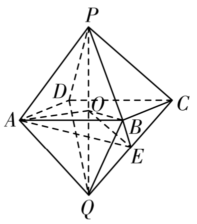
【解析】在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

由勾股定理可得 $A_1B=A_1C=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，在等腰三角形 A_1BC 中，底边 BC 上的高为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$，所以等腰三角形 A_1BC 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$.

设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h，由 $V_{A-A_1BC}=V_{A_1-ABC}$ 得 $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\sqrt{7}=\frac{1}{3}\times2\times\sqrt{3}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **故选** B.

12. B 【解析】连接 AO,AE，如图所示. 因为 O,E 分别为 PQ,CQ 的中点，所以 OE 为 $\triangle PCQ$ 的中位线，所以 $OE=1$. 因为 EB 为正三角形 CBQ 的中线，所以 $EB=\sqrt{3}$. 易知 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，则 $OB=$

$\sqrt{2}$，所以 $EB^2=OB^2+OE^2$，所以 $OB\perp OE$，$\triangle OEB$ 为直角三角形，所以 $S_{\triangle OEB}=\frac{1}{2}OE\cdot OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $QE=CE$，所以 E 到平面 AOB 的距离为 $\frac{1}{2}OQ=\frac{1}{2}\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设 A 到平面 OEB 的距离为 d，因为 $V_{A-OEB}=V_{E-OAB}$，所以$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle OEB}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle OAB}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $d=1$. **故选 B.**



名师点拨 求点到平面的距离时，可以作出或者找到过这个点的该平面的垂线，也可以利用等体积法进行转化.

13. B 【**解析**】如图，连接 B_1D,B_1D_1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $DD_1\perp A_1C_1$，

又 $B_1D_1\perp A_1C_1$，

$DD_1,B_1D_1\subset$ 平面 DD_1B_1，$DD_1\cap B_1D_1=D_1$，所以 $A_1C_1\perp$ 平面 DD_1B_1，

又 $B_1D\subset$ 平面 DD_1B_1，则有 $A_1C_1\perp B_1D$.

同理有 $A_1B\perp B_1D$，又 $A_1C_1,A_1B\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\cap A_1B=A_1$，

所以 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1. 同理有 $B_1D\perp$ 平面 AD_1C，所以平面 A_1BC_1//平面 AD_1C.

由正方体棱长为 $2\sqrt{3}$，得 $A_1B_1=B_1C_1=BB_1=2\sqrt{3}$，$A_1C_1=A_1B=BC_1=2\sqrt{6}$，

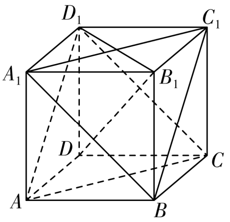
设点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 h，由 $V_{A_1-BB_1C_1}=V_{B_1-A_1BC_1}$，

有$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}h$，解得 $h=2$，

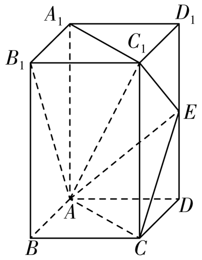
即点 B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 2，同理

点 D 到平面 AD_1C 的距离为 2，又 $B_1D=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=6$，

则平面 A_1BC_1 到平面 AD_1C 的距离为 $6-2-2=2$. **故选 B.**



14.【解】如图，连接 C_1E，C_1A. 因为 $A_1C_1 /\!/ AC$，$AC\subset$平面 EAC，$A_1C_1\not\subset$平面 EAC，所以 $A_1C_1 /\!/$平面 EAC，所以 A_1C_1 到平面 EAC 的距离等于 C_1 到平面 EAC 的距离，设 C_1 到平面 EAC 的距离为 d. 因为正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2，$\angle B_1AB=60°$，所以 $CC_1=BB_1=AB\cdot\tan 60°=2\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{2}$. 因为 E 为 DD_1 的中点，所以 $DE=\sqrt{3}$，所以 $AE=CE=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，所以 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot\sqrt{AE^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{7-2}=\sqrt{10}$，$S_{\triangle CC_1E}=\frac{1}{2}CD\cdot CC_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 因为 $V_{C_1-ACE}=V_{A-CC_1E}$，所以$\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle CC_1E}\cdot AD$，所以$\frac{1}{3}\times\sqrt{10}\,d=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 2$，解得 $d=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

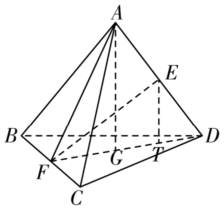


名师点拨 当一条直线与一个平面平行时，这条直线上任意一点到这个平面的距离均为这条直线到这个平面的距离. 因此，在求线面距离时，常常转化为点到平面的距离. 在求一些几何体体积时，有时也用这个思想进行转化.

15. C

攻略上分 本题为求直线与平面所成角的正弦值，具体步骤可见通法攻略 28.

【解析】如图，连接 DF，取 $\triangle BCD$ 的中心 G，则 G 在 DF 上，连接 AG，则 $AG\perp$ 平面 BCD，过点 E 作 $ET//AG$，交 FD 于点 T，则 $ET\perp$ 平面 BCD，又 E 为 AD 的中点，则 T 为 DG 的中点. 所以 $\angle EFD$ 为直线 EF 与平面 BCD 所成的角. 设正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2，则 $DF=\sqrt{3}$，$GD=\frac{2}{3}DF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\angle ADG=\cos\angle EDF=\frac{GD}{AD}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 连接 AF，$AF=\sqrt{3}$，$DF=\sqrt{3}$，E 是 AD 的中点，所以 $EF\perp AD$，所以 $\sin\angle EFD=\cos\angle EDF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C.



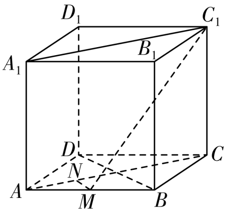
16. D

思路导引 当点 N 是 AC 上靠近点 A 的四等分点时，证得 $MN\perp$ 平面 ACC_1A_1，可得直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的最大值. 因为点 M 到平面 ACC_1A_1 的距离是定值，所以求线面角的最小值，转化为求 MN 的最大值，利用数形结合法求解，最后得出结论.

【解析】连接 BD，如图，设正方体棱长为 2，易知 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，当点 N 是 AC 上靠近点 A 的四等分点时，$MN//BD$，此时 $MN\perp$ 平面 ACC_1A_1，直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最大，为 1.

连接 MC_1，当点 N 与 C_1 重合时，MN 最长，$MC_1=\sqrt{BM^2+BC^2+CC_1^2}=3$，又点 M 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\frac{BD}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以此时直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最小，即 MC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值最小，为 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

所以直线 MN 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{6},1\right]$. **故选 D.**



17. (1)【**证明**】因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AC\perp BD$.

因为 $SD\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $SD\perp AC$.

因为 $BD\cap SD=D$,且 BD,$SD\subset$ 平面 SDB,

所以 $AC\perp$ 平面 SDB.

(2)【**解**】因为 $SD\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $\angle SBD$ 为直线 SB 与平面 $ABCD$ 所成的角.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,且 $AB=1$,

所以 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$,$S_{正方形ABCD}=AB\times AD=1$.

因为 SB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$,

即 $\angle SBD=60°$,所以 $\tan\angle SBD=\frac{SD}{BD}=\frac{SD}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,解得 $SD=\sqrt{6}$,

所以四棱锥 $S-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times1\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

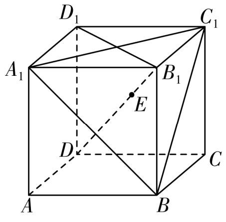
18. **思路导引** (1)根据正方体的结构特征证得 $B_1D_1\perp A_1C_1$,由线面垂直的性质证得 $A_1C_1\perp DD_1$,再由线面垂直的判定定理证得 $A_1C_1\perp$ 平面 B_1DD_1,最后根据线面垂直的性质即可证明 $B_1D\perp A_1C_1$. (2)由(1)进一步证得 $B_1E\perp$ 平面 A_1BC_1,结合正方体的结构特征证明 $\mathrm{Rt}\triangle B_1EA_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EC_1\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1EB$,进而得到 E 为 $\triangle A_1BC_1$ 的外心,根据 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形,即可得到 E 为正三角形 A_1BC_1 的中心. (3)求出 B_1E,DE 的长,由 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1 得到线线垂直关系,再根据 $PD+PB_1=7+\sqrt{13}$ 求出 PE 的长,找到直线 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角,计算正切值即可.

(1)【证明】如图①,连接 D_1B_1,因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形,所以 $B_1D_1\perp A_1C_1$.

因为 $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $A_1C_1\perp DD_1$.

又 $B_1D_1\cap DD_1=D_1$,B_1D_1,$DD_1\subset$ 平面 B_1DD_1,

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 B_1DD_1,又 $B_1D\subset$ 平面 B_1DD_1,所以 $B_1D\perp A_1C_1$.



图①

(2)【证明】如图②,连接 EA_1,EB,EC_1,由(1)知,$B_1D\perp A_1C_1$,同理可证 $B_1D\perp A_1B$,

又 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$,A_1B,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1,

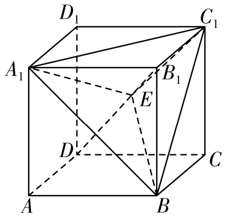
即 $B_1E\perp$ 平面 A_1BC_1. 又 A_1E,BE,$C_1E\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $B_1E\perp A_1E$,$B_1E\perp BE$,$B_1E\perp C_1E$,

又因为 $A_1B_1=BB_1=B_1C_1$,

所以 $\text{Rt}\triangle B_1EA_1\cong\text{Rt}\triangle B_1EC_1\cong\text{Rt}\triangle B_1EB$,所以 $EA_1=EB=EC_1$,

所以 E 为 $\triangle A_1BC_1$ 的外心,因为 $A_1C_1=A_1B=BC_1$,

所以 $\triangle A_1BC_1$ 是正三角形,所以 E 为 $\triangle A_1BC_1$ 的中心.



图②

(3)【解】如图③,连接 PD,PB_1,EA_1,EB,EP,由(2)知 E 为正三角形 A_1BC_1 的中心,由题意知,$A_1B=6\sqrt{2}$.

在 $\triangle A_1EB$ 中,由正弦定理得 $BE=\dfrac{A_1B\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}$,

$B_1E=\sqrt{BB_1^2-BE^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$.

因为 $B_1D=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=6\sqrt{3}$，所以 $DE=B_1D-B_1E=4\sqrt{3}$.

因为 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1，$PE\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $PE\perp B_1D$，

即 $B_1E\perp PE$，$DE\perp PE$.

$PD+PB_1=7+\sqrt{13}$，即 $\sqrt{PE^2+48}+\sqrt{PE^2+12}=7+\sqrt{13}$，

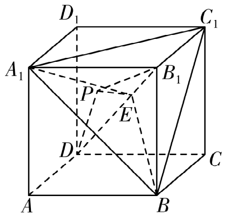
又 $PE>0$，解得 $PE=1$，

所以点 P 的轨迹是以点 E 为圆心，1 为半径的圆.

因为 $B_1E\perp$ 平面 A_1BC_1，所以 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角为 $\angle B_1PE$，

而 $\tan\angle B_1PE=\dfrac{B_1E}{PE}=\dfrac{2\sqrt{3}}{1}=2\sqrt{3}$，又 $0<\angle B_1PE<\dfrac{\pi}{2}$，

故直线 B_1P 与平面 A_1BC_1 所成角的正切值为 $2\sqrt{3}$.



图③

能力上分

1. A 【解析】在正方形 $ABCD$ 中，$AD\perp DF$，$AB\perp BE$，所以折起后 $AH\perp FH$，$AH\perp EH$，又 $FH\cap EH=H$，$FH,EH\subset$ 平面 EFH，所以 $AH\perp$ 平面 EFH，**故 A 正确**；因为 $AH\cap AG=A$，所以 AG 与平面 EFH 不垂直，**故 B 错误**；因为 $AF\subset$ 平面 AEF，$\angle HFA\neq\dfrac{\pi}{2}$，所以 HF 与平面 AEF 不垂直，**故 C 错误**；不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，易知空间图形中，$HG=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$AG=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$AH=1$，因为 $AH^2\neq HG^2+AG^2$，所以 $\angle HGA\neq\dfrac{\pi}{2}$，又 $AG\subset$ 平面 AEF，所以 HG 与平面 AEF 不垂直，**故 D 错误. 故选** A.

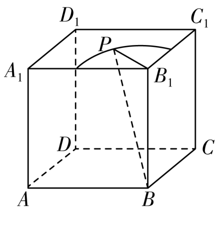
归纳总结 证明直线与平面垂直的常用方法

(1)利用线面垂直的判定定理.

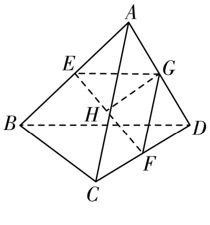
(2)利用“两平行线中的一条与平面垂直,则另一条也与这个平面垂直”.

(3)利用“一条直线垂直于两个平行平面中的一个,则也垂直于另一个平面”.

2. B 【解析】直线 BP 与下底面 $ABCD$ 所成角等于直线 BP 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角,连接 B_1P,如图,因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$PB_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $BB_1\perp PB_1$,故 $\angle BPB_1$ 为直线 BP 与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角,则 $\angle BPB_1=60°$. 因为 $BB_1=1$,所以 $PB_1=\frac{BB_1}{\tan 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故点 P 的轨迹为以 B_1 为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径,位于上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的圆的 $\frac{1}{4}$,故轨迹长度为 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. **故选 B.**



3. D 【解析】如图,取线段 AD 的中点 G,连接 EG,FG.



因为 E,G 分别为 AB,AD 的中点,所以 $EG/\!/BD$ 且 $EG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 4=2$,同理可得 $FG/\!/AC$ 且 $FG=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 4=2$,所以异面直线 BD,AC 所成的角为 $\angle EGF$ 或其补角.

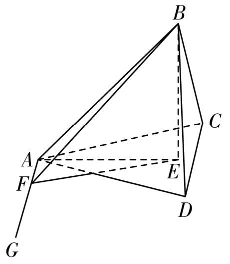
①若 $\angle EGF=60°$,则 $\triangle EGF$ 是边长为 2

的等边三角形，故 $EF=2$.

②若 $\angle EGF=120°$，因为 $EG=FG=2$，所以 $\triangle EGF$ 为等腰三角形，且 $\angle GEF=\angle GFE=30°$，取 EF 的中点 H，连接 GH，则 $GH\perp EF$，且 $EF=2EH=2EG\cos 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

综上所述，$EF=2$ 或 $2\sqrt{3}$. **故选 D.**

4. A 【解析】设 B 在底面 ACD 的射影为 E，过点 A 作 $AG/\!/CD$，作 $EF\perp AG$，交 AG 于点 F，连接 BF，AE，如图所示，则 α 为 $\angle BAG$ 或其补角，β 为 $\angle BAE$ $\left(\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$.



由 $BE\perp$ 平面 ACD，$AG\subset$ 平面 ACD 得 $AG\perp BE$，又 $EF\perp AG$，$EF\cap BE=E$，EF，$BE\subset$平面 BEF，所以 $AG\perp$平面 BEF，又 $BF\subset$平面 BEF，所以 $AG\perp BF$，

所以 $\cos\alpha=|\cos\angle BAG|=\frac{AF}{AB}=\frac{AF}{AE}\cdot\frac{AE}{AB}=\cos\angle EAF\cdot\cos\angle BAE=\cos\angle EAF\cdot\cos\beta\leqslant\cos\beta$，则 $\alpha\geqslant\beta$.

因为 $AB=AC=3$，$BD=2CD=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{5}$，

由余弦定理知 $\cos\angle ADB=\frac{5+8-9}{4\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

同理 $\cos\angle ADC=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BD\sin\angle ADB$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\sin\angle ADC$，

所以 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ACD}$.

点 B 到平面 ACD 的距离为 BE，设点 C 到平面 ABD 的距离为 d，

则由 $V_{B\text{-}ACD}=V_{C\text{-}ABD}$，得 $d=\frac{1}{2}BE$.

因为 $\sin\beta=\frac{BE}{AB}=\frac{BE}{3}$，$\sin\gamma=\frac{d}{AC}=\frac{BE}{6}$ 且 $\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $\sin\beta=2\sin\gamma>2\sin\gamma\cos\gamma=\sin 2\gamma$.

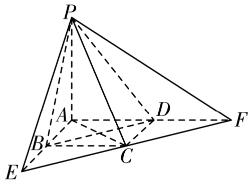
又 $\sin\gamma=\frac{BE}{6}<\frac{AB}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $0<\gamma<\frac{\pi}{6}$，所以 $\beta>2\gamma$. 综上，$\alpha\geqslant\beta>2\gamma$.

故选 A.

5. $6\sqrt{17}$

思路导引 先证明线面垂直进而证明 $EF\perp PC$，求出 $\triangle PEF$ 的面积.

【解析】如图，过点 C 作 BD 的平行线与直线 AB，AD 分别交于点 E，F，连接 AC，PE，PF，则 $AE=AF=6$，$EF=6\sqrt{2}$.



由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$EF\subset$ 平面 $ABCD$，可得 $PA\perp EF$，由四边形 $ABCD$ 是正方形及 $BD/\!/EF$，可得 $AC\perp EF$，

因为 $AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $EF\perp$ 平面 PAC，又 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $EF\perp PC$.

因为 $PA=4$，$AC=3\sqrt{2}$，所以 $PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{34}$，所以 $\triangle PEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot EF\cdot PC=6\sqrt{17}$.

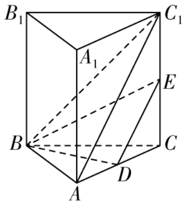
6. **【解】**存在点 Q，使得 $PC\perp$ 平面 DEQ，此时 $\frac{PB}{QB}=3$，证明如下：

连接 BD（图略），易得 $BD=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{1^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$，因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，CD，$BD\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp CD$，$PD\perp BD$，则 $PC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，则 $PB^2+BC^2=PC^2$，故 $PB\perp BC$. 当 $\frac{PB}{QB}=3$ 时，$PQ=\frac{2}{3}PB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$PE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{2}$，$\cos\angle BPC=$

$\frac{PB}{PC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以由余弦定理得 $QE^2=PQ^2+PE^2-2PQ\cdot PE\cdot\cos\angle BPC=\frac{2}{3}$,则 $QE^2+PE^2=PQ^2$,故 $QE\perp PC$. 因为 $PD=CD$,E 是 PC 的中点,所以 $DE\perp PC$,$QE\cap DE=E$,QE,$DE\subset$ 平面 DEQ,所以 $PC\perp$ 平面 DEQ. 故存在点 Q,使得 $PC\perp$ 平面 DEQ,此时 $\frac{PB}{QB}=3$.

7.【解】(1)在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$BD\subset$ 平面 ABC,所以 $AA_1\perp BD$. 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形,D 为 AC 的中点,所以 $AC\perp BD$. 又因为 $AA_1\cap AC=A$,AA_1,$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C,所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C. 又因为 $AC_1\subset$ 平面 AA_1C_1C,所以 $BD\perp AC_1$,所以直线 BD 与 AC_1 所成角的大小为 $90°$.

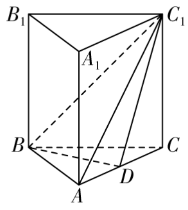
一题多解 如图①,取 CC_1 的中点 E,连接 DE,BE,因为 D 为 AC 的中点,所以 $DE/\!/AC_1$,故 $\angle BDE$ 或其补角为直线 BD 与 AC_1 所成的角. 设 $AC=2a$,$CC_1=2b$,因为 $\triangle ABC$ 为正三角形,所以 $BD=\sqrt{3}a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中,$DE=\sqrt{a^2+b^2}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,$BE=\sqrt{4a^2+b^2}$,所以 $BE^2=BD^2+DE^2$,所以 $\angle BDE=90°$,所以直线 BD 与 AC_1 所成角的大小为 $90°$.



图①

(2)如图②,连接 C_1D. 由(1)知,$BD\perp$ 平面 AA_1C_1C,又 $C_1D\subset$ 平面 AA_1C_1C,所以 $BD\perp C_1D$ 且 $\angle BC_1D$ 即为直线 BC_1 与平面 AA_1C_1C 所成的角,设等边三角形 ABC 的边长为 2,则 $CC_1=AA_1=AB=BC=2$,所以 $BD=AB\sin 60°=\sqrt{3}$,$BC_1=\sqrt{BC^2+CC_1{}^2}=2\sqrt{2}$,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BC_1D$ 中,

$\sin\angle BC_1D=\frac{BD}{BC_1}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，即直线 BC_1 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.



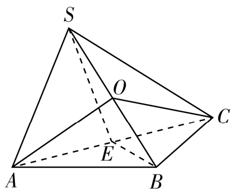
图②

8. (1)【证明】取 AC 的中点 E，连接 SE,BE.

因为 $AB=BC$，$SA=SC$，且 E 为 AC 的中点，所以 $SE\perp AC$，$BE\perp AC$，

又 $SE\cap BE=E$，$SE,BE\subset$平面 SBE，所以 $AC\perp$平面 SBE.

由于 $SB\subset$平面 SBE，故 $AC\perp SB$.



(2)【解】易知$\triangle CBS\cong\triangle ABS$，因为 $SC\perp BC$，所以 $SA\perp BA$.

设 BS 的中点为 O，连接 OA,OC，则 O 到 A,B,C,S 四点的距离相等，故 O 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心.

因为 $AB=BC=2$，$AC=AS=CS=2\sqrt{2}$，所以 $SE=\sqrt{6}$，$SB=2\sqrt{3}$，$EB=\sqrt{2}$.

设 S 到平面 ABC 的距离为 h_1，B 到平面 SAC 的距离为 h_2，

由等体积法可得 $V_{S-ABC}=V_{B-SAC}$，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times h_1=\frac{1}{3}S_{\triangle SAC}\times h_2$，即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2h_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}\,h_2$，解得 $h_1=\sqrt{3}h_2$.

由余弦定理可得 $\cos\angle SEB=\frac{SE^2+EB^2-SB^2}{2SE\cdot EB}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，又$\angle SEB\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\angle SEB=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $h_1=SE\times\sin(\pi-\angle SEB)=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=$

2，从而 $h_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故球心 O 到平面 SAC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.6.3 平面与平面垂直

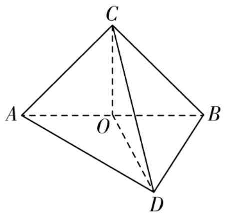
对点上分

1. B 【解析】对于①，显然混淆了平面与半平面的概念，是错误的；对于②，由于 a,b 分别垂直于两个半平面，所以也垂直于二面角的棱，但由于异面直线所成的角为锐角或直角，所以 a,b 所成的角与二面角相等或互补，是正确的；对于③，因为所作射线不垂直于棱，所以是错误的；④是正确的. **故 B 正确.**

2. A

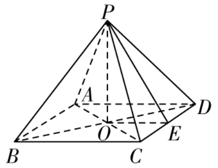
攻略上分 本题为求有棱二面角的平面角问题，利用大招攻略 30 中的定义法求解即可.

【解析】在四面体 $A-BCD$ 中，取 AB 的中点 O，连接 CO，DO，如图. 由 $AD=BD=AB=4$，$AC=BC$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，得 $OC\perp AB$，$OD\perp AB$，因此$\angle COD$ 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角. 在 $\triangle COD$ 中，$OC=2$，$OD=2\sqrt{3}$，$CD=2\sqrt{7}$，由余弦定理得$\cos\angle COD=\frac{OC^2+OD^2-CD^2}{2OC\cdot OD}=\frac{4+12-28}{2\times2\times2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $0\leqslant\angle COD\leqslant\pi$，则 $\angle COD=\frac{5\pi}{6}$，所以二面角 $C-AB-D$ 的大小为$\frac{5\pi}{6}$. **故 A 正确.**



3. B 【解析】如图，设正四棱锥为 $P-ABCD$，连接 AC，BD 交于点 O，连接 PO，则 $PO\perp$底面 $ABCD$，作 $OE\perp CD$ 于点 E，连接 PE，而 $CD\subset$底面 $ABCD$，则 $PO\perp CD$. 而 $OE\cap PO=O$，OE，$PO\subset$平面 POE，

故 $CD\perp$ 平面 POE，又 $PE\subset$ 平面 POE，故 $CD\perp PE$，故 $\angle PEO$ 即为平面 PCD 与底面 $ABCD$ 所成的角，也即正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面与底面所成的角. 因为正四棱锥的侧面积是底面积的 $\sqrt{2}$ 倍，故 $4S_{\triangle PCD}=\sqrt{2}\times4S_{\triangle OCD}$，即 $S_{\triangle PCD}=\sqrt{2}S_{\triangle OCD}$，即 $\frac{1}{2}CD\times PE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD\times OE$，即 $\frac{OE}{PE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 在 $Rt\triangle POE$ 中，$\cos\angle PEO=\frac{OE}{PE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\angle PEO=45°$，即正四棱锥的侧面与底面所成二面角的大小为 $45°$. **故 B 正确.**

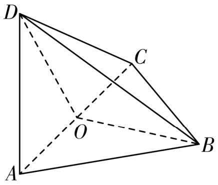


4. B

思路导引 取 AC 的中点为 O，连接 OB，OD，BD，利用余弦定理求 BD，$\cos\angle BCD$，进而得 $\sin\angle BCD$，由平面 BCD 截三棱锥 $B-ACD$ 的外接球所得截面为圆，即为 $\triangle BCD$ 的外接圆，设该圆的半径为 R，最后利用正弦定理求 R，进而即可得解.

【解析】 如图，取 AC 的中点为 O，连接 OB，OD，BD，由题意有 $AD=DC=BA=BC=4$，所以 $DO\perp AC$，$BO\perp AC$，

所以 $\angle DOB$ 为二面角 $B-AC-D$ 的平面角，所以 $\angle DOB=\frac{2\pi}{3}$，$OD=OB=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.



由余弦定理有 $BD^2=OD^2+OB^2-2OD\cdot OB\cos\frac{2\pi}{3}=8+8-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=24$，所以 $BD=2\sqrt{6}$.

又由余弦定理得 $\cos\angle BCD=$

$\dfrac{BC^2+DC^2-BD^2}{2BC\cdot DC}=\dfrac{16+16-24}{2\times4\times4}=\dfrac{1}{4}$,

所以 $\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

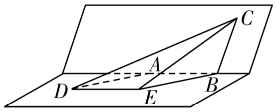
由平面 BCD 截三棱锥 $B-ACD$ 的外接球所得截面为圆,即为$\triangle BCD$ 的外接圆,设该圆的半径为 R,

由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8\sqrt{10}}{5}=2R$,所以 $R=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$,

所以该圆的面积 $S=\pi R^2=\pi\times\dfrac{160}{25}=\dfrac{32\pi}{5}$,

故选 B.

5. $\dfrac{3\pi}{4}$ **【解析】**如图,过点 B 作 $BE/\!/AD$ 且 $BE=AD$,连接 DE,CE,因为 $AD\perp AB$,所以四边形 $ABED$ 是矩形,$BE\perp AB$. 又 $BC\perp AB$,所以$\angle CBE$ 是所求二面角的平面角.



因为 $DE/\!/AB$,$BC\perp AB$,则 $BC\perp DE$. 又 $BE\perp DE$,$BC\cap BE=B$,BC,$BE\subset$平面 BCE,所以 $DE\perp$平面 BCE,而 $CE\subset$平面 BCE,所以 $DE\perp CE$,$DE=AB=5$ m,所以 $CE=\sqrt{DC^2-DE^2}=\sqrt{25\times6-25}=5\sqrt{5}$(m),$BE=AD=5\sqrt{2}$ m,由题可知 $BC=5$ m,则 $\cos\angle CBE=\dfrac{BC^2+BE^2-EC^2}{2BC\cdot BE}=\dfrac{25+50-125}{2\times5\times5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因为$\angle CBE$ 是三角形的内角,所以$\angle CBE=\dfrac{3\pi}{4}$,即水库底面与水坝斜面所成的二面角的大小为$\dfrac{3\pi}{4}$.

6. B **【解析】**由 $m/\!/\beta$,得在平面 β 内有一条直线 l 与 m 平行,又 $m\perp\alpha$,所以 $l\perp\alpha$,所以 $\alpha\perp\beta$;由 $m\perp\alpha$,$\alpha\perp\beta$,得 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$. 故“$m/\!/\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的充分不必要条件. **故 B 正确.**

7. C 【解析】对于 C，因为 $AB=CB$，$AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$，$DE\perp AC$，因为 $DE\cap BE=E$，DE，$BE\subset$ 平面 BDE，所以 $AC\perp$ 平面 BDE，因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 BDE，同理 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$ 平面 BDE，**故 C 正确；**

对于 A，B，由于平面 $ABC\perp$ 平面 BDE，平面 $BDE\cap$ 平面 $ABD=BD$，而 BD 不垂直于平面 ABC，故平面 ABC 与平面 ABD 不垂直，同理可得平面 ABC 与平面 BCD 不垂直，**故 A，B 错误；**

对于 D，平面 ABC 与平面 ACD 不一定垂直，**故 D 错误.**

8. ①②④ 【解析】对于①，由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 知 $AB/\!/A_1B_1/\!/C_1D_1$，且 $AB=A_1B_1=C_1D_1$，

$\therefore$ 四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，

$\therefore BC_1/\!/AD_1$，又 $BC_1\not\subset$ 平面 AD_1C，$AD_1\subset$ 平面 AD_1C，

$\therefore BC_1/\!/$平面 AD_1C，又$\because$ 点 P 在线段 BC_1 上运动，

$\therefore$ 点 P 到平面 AD_1C 的距离为定值，

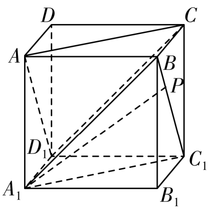
又$\because$ $\triangle AD_1C$ 的面积为定值，

$\therefore$ 三棱锥 $P-CD_1A$ 的体积不变，即三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变，**故①正确.**

对于②，连接 A_1B，A_1C_1，A_1P，如图甲所示. $A_1C_1/\!/AC$ 且 $A_1C_1=AC$，由①知，$AD_1/\!/BC_1$，$\because A_1C_1\cap BC_1=C_1$，且 A_1C_1，$BC_1\subset$ 平面 BA_1C_1，$AC\cap AD_1=A$，且 AC，$AD_1\subset$ 平面 ACD_1，

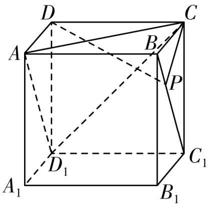
$\therefore$ 平面 $BA_1C_1/\!/$平面 ACD_1，又 $A_1P\subset$ 平面 BA_1C_1，

$\therefore$ 由面面平行的性质可得 $A_1P/\!/$平面 ACD_1，**故②正确.**



图甲

对于③，如图乙，连接 DP，CP.



图乙

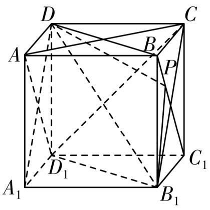
$\because DC \perp$ 平面 BCC_1B_1, $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1, $\therefore DC \perp BC_1$, 若 $DP \perp BC_1$,

$\because DC \cap DP = D$, DC, $DP \subset$ 平面 DCP,

$\therefore BC_1 \perp$ 平面 DCP, 又 $PC \subset$ 平面 DCP,

$\therefore BC_1 \perp PC$, 则 P 为 BC_1 的中点, 与 P 为动点矛盾, **故③错误**.

对于④, 如图丙, 连接 DB_1, DP, PB_1, BD, B_1D_1, A_1D, B_1C.



图丙

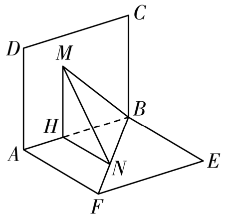
由 $AC \perp$ 对角面 BDD_1B_1, $DB_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1, 知 $DB_1 \perp AC$, 由 $AD_1 \perp$ 对角面 A_1B_1CD, $DB_1 \subset$ 平面 A_1B_1CD, 知 $DB_1 \perp AD_1$, 又 $AC \cap AD_1 = A$, AC, $AD_1 \subset$ 平面 ACD_1, $\therefore DB_1 \perp$ 平面 ACD_1. $\because DB_1 \subset$ 平面 PDB_1, $\therefore$ 平面 $PDB_1 \perp$ 平面 ACD_1, **故④正确**.

9. 【证明】(1) $\because$ 几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, $\therefore BB_1 /\!/ DD_1$, 且 $BB_1 = DD_1$, $\therefore$ 四边形 BDD_1B_1 是平行四边形, $\therefore BD /\!/ B_1D_1$. 又 $\because BD \not\subset$ 平面 B_1D_1C, $B_1D_1 \subset$ 平面 B_1D_1C, $\therefore BD /\!/$ 平面 B_1D_1C. 同理, $A_1B /\!/$ 平面 B_1D_1C, 且 $A_1B \cap BD = B$, A_1B, $BD \subset$ 平面 A_1BD, $\therefore$ 平面 $A_1BD /\!/$ 平面 CB_1D_1.

(2) $\because$ 几何体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, $\therefore AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore AA_1 \perp BD$.

又 $\because BD \perp AC$, $A_1A \cap AC = A$, A_1A, $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1, $\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1A_1. 又 $BD \subset$ 平面 A_1BD, $\therefore$ 平面 $A_1BD \perp$ 平面 ACC_1A_1.

10. B 【解析】如图, 过点 N 作 $NH \perp AB$, 垂足为 H, 连接 MH, MB,



而 $MN\perp AB$，$MN\cap HN=N$，MN，$HN\subset$平面 MNH，则 $AB\perp$平面 MNH.

又 $MH\subset$平面 MNH，则 $AB\perp MH$，又平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$，

平面 $ABCD\cap$平面 $ABEF=AB$，$MH\subset$平面 $ABCD$，则 $MH\perp$平面 $ABEF$，

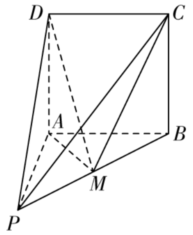
又 $HN\subset$平面 $ABEF$，于是 $MH\perp NH$，而 $HN=HB$，因此 $\mathrm{Rt}\triangle BHM\cong\mathrm{Rt}\triangle NHM$，即 $MB=MN=2$，

则点 M 的轨迹是以 B 为圆心，2 为半径的圆弧，所以 DM 的最小值为 $DB-2=2\sqrt{2}-2$. **故选 B.**

关键点拨 (1)由面面垂直可证明线面垂直，且一定注意两点：①直线必须在其中一个平面内；②直线必须垂直两平面交线.

(2)面面垂直的性质定理是作辅助线的一个重要依据，我们要作一个平面的一条垂线，通常是先找这个平面的一个垂面，在这个垂面中，作交线的垂线.

11. D 【解析】如图，连接 AM，因为 $AD\perp AB$，平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AD\perp$平面 PAB. 因为 $AM\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp AM$. 因为 $AD/\!/BC$，所以 $BC\perp$平面 PAB. 因为 $BM\subset$平面 PAB，所以 $BC\perp BM$. 又 $AP=AB=2$，所以 $AM=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，所以 $DM=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，$CM=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，所以在 $\triangle CDM$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle DMC=\frac{DM^2+CM^2-CD^2}{2DM\cdot CM}=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$. **故 D 正确.**



12. C 【解析】如图，取 AB 的中点 E，连接 CE，PE.

因为底面 ABC 与侧面 PAB 均是边长为 2 的正三角形，

所以 $CE\perp AB$，$PE\perp AB$，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，且 $PE\subset$ 平面 PAB，

所以 $PE\perp$ 平面 ABC.

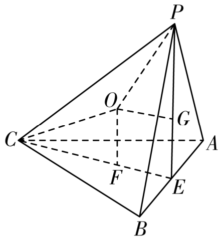
在 CE 上取点 F，使得 $CF=2EF$，故 F 为等边三角形 ABC 的中心，

该三棱锥外接球的球心 O 在平面 ABC 上的投影为 F，连接 OF，

其中 $PE=CE=2\sin 60°=\sqrt{3}$，$EF=\dfrac{1}{3}CE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$CF=\dfrac{2}{3}CE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

设 $OF=h$，连接 OP，OC，过点 O 作 $OG\perp PE$ 于点 G，

则 $EG=OF=h$，$PG=\sqrt{3}-h$，$OG=EF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



设 $OP=OC=R$，则 $CF^2+OF^2=OG^2+PG^2=R^2$，

即 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+h^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(\sqrt{3}-h)^2$，解得 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $R^2=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{5}{3}$，即该三棱锥外接球的表面积是 $4\pi R^2=\dfrac{20\pi}{3}$. **故选 C.**

一题多解 取 AB 的中点 E，连接 CE，PE（图略），

因为底面 ABC 与侧面 PAB 均是边长为 2 的正三角形，且平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，所以 $CE\perp AB$，$PE\perp AB$，所以 $\angle PEC=\frac{\pi}{2}$，

由对称性可知球心 O 在 $\angle PEC$ 的角平分线上.

设三棱锥外接球的球心 O 在平面 ABC 上的投影为 F，连接 OF，OC，OE（图略）.

因为底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，

所以 F 为底面 ABC 的中心，所以 $FE=OF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

提示：正三角形所有心都是重合的，所以中心也是重心，满足 $CF:FE=2:1$

设 $OC=R$，所以 $R^2=CF^2+OF^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{5}{3}$，

即该三棱锥外接球的表面积是 $4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$. **故选 C.**

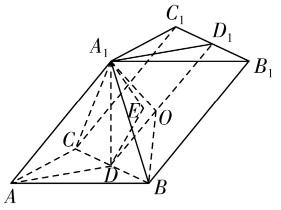
13. （1）【**证明**】如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，连接 DD_1，A_1D，由 D，D_1 分别为 BC，B_1C_1 中点，

得 $DD_1/\!/BB_1/\!/AA_1$，$DD_1=BB_1=AA_1$，则四边形 ADD_1A_1 为平行四边形，$A_1D_1/\!/AD$，

由 $\angle BAC=90°$，得 $AD=BD$，由 $A_1B=A_1C$，得 $A_1D\perp BC$，

则 $AA_1^2=A_1B^2=A_1D^2+BD^2=A_1D^2+AD^2$，于是 $AD\perp A_1D$，由 $AB=AC$，得 $AD\perp BC$，

而 $A_1D\cap BC=D$，A_1D，$BC\subset$ 平面 A_1BC，则 $AD\perp$ 平面 A_1BC，所以 $A_1D_1\perp$ 平面 A_1BC.



(2)【解】由(1)知，$BC\perp AD$，$BC\perp A_1D$，A_1D，$AD\subset$平面 ADD_1A_1，$AD\cap A_1D=D$，所以 $BC\perp$平面 ADD_1A_1，

而 $BC\subset$平面 BCC_1B_1，则平面 $BCC_1B_1\perp$平面 ADD_1A_1，

在平面 ADD_1A_1 内过 A_1 作 $A_1O\perp DD_1$，交 DD_1 于点 O，平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $ADD_1A_1=DD_1$，

因此 $A_1O\perp$平面 BCC_1B_1，连接 BO，则 $\angle A_1BO$ 是直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成的角.

由 $AB=AC=2$，$A_1A=4$，得 $A_1D_1=AD=\sqrt{2}$，$A_1D=\sqrt{AA_1^2-AD^2}=\sqrt{14}$，$DD_1=AA_1=4$.

在 Rt $\triangle A_1DD_1$ 中，$A_1O=\dfrac{A_1D\cdot A_1D_1}{DD_1}=\dfrac{\sqrt{14}\times\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

在 Rt $\triangle A_1OB$ 中，$\sin\angle A_1BO=\dfrac{A_1O}{A_1B}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$，

所以直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

(3)【解】由(1)得 $A_1D_1\perp A_1D$，又 $BC=2\sqrt{2}$，$A_1A=4$，

则 $A_1D_1=AD=\sqrt{2}$，$A_1D=\sqrt{14}$，$DD_1=AA_1=4$，由(2)得 $A_1O=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

过点 A_1 作 $A_1E\perp$平面 BCC_1B_1 于 E，连接 DE，由 $BC\subset$平面 BCC_1B_1，得 $A_1E\perp BC$，

而 $A_1D\perp BC$，$A_1D\cap A_1E=A_1$，A_1D，$A_1E\subset$平面 A_1DE，则 $BC\perp$平面 A_1DE，

又 $DE\subset$平面 A_1DE，则 $DE\perp BC$，$\angle A_1DE$ 是二面角 A_1-BC-C_1 的平面角，

显然 $A_1E\leqslant A_1O$，当且仅当 E，O 两点重合时取等号，$\sin\angle A_1DE=\dfrac{A_1E}{A_1D}\leqslant\dfrac{A_1O}{A_1D}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以二面角 A_1-BC-C_1 的正弦值的最大

值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14. D

思路导引 对于 A,先证 $B_1D_1//$平面 A_1BD 和 $B_1C//$平面 A_1BD,即可由面面平行的判定定理判断;对于 B,由 A 结合题意即可判断;对于 C,由三棱锥 $A-A_1BD$ 是正三棱锥,H 为 A 在$\triangle A_1BD$ 面内的投影且该投影落在$\triangle A_1BD$ 的中心即可判断;对于 D,由选项 C 得点 H 是$\triangle A_1BD$ 的垂心,且为$\triangle A_1BD$ 的重心,得到点 H 到底面 $B_1A_1D_1$ 的距离为$\frac{2}{3}AA_1=\frac{2}{3}$,再由 $V_{B_1-HA_1D_1}=V_{H-B_1A_1D_1}$ 即可求解.

【解析】对于 A,由正方体的性质可知 $BB_1//DD_1$,且 $BB_1=DD_1$,$B_1A_1//CD$ 且 $B_1A_1=CD$,

所以四边形 BB_1D_1D 和 B_1A_1DC 均为平行四边形,所以 $BD//B_1D_1$,$B_1C//A_1D$,

因为 BD,$A_1D\subset$平面 A_1BD,B_1D_1,$B_1C\not\subset$平面 A_1BD,

所以 $B_1D_1//$平面 A_1BD,$B_1C//$平面 A_1BD,

又 B_1D_1,$B_1C\subset$平面 B_1CD_1,$B_1D_1\cap B_1C=B_1$,所以平面 $A_1BD//$平面 B_1CD_1,**故 A 正确**;

对于 B,由题意 $AH\perp$平面 A_1BD,又平面 $A_1BD//$平面 B_1CD_1,

所以 $AH\perp$平面 B_1CD_1,**故 B 正确**;

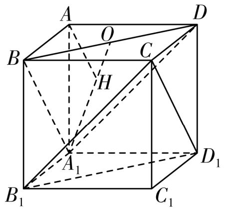
对于 C,由正方体性质可知 $AB=AD=AA_1$,$A_1B=A_1D=BD$,

所以三棱锥 $A-A_1BD$ 是正三棱锥,则由题可知 H 为 A 在$\triangle A_1BD$ 面内的投影,

该投影落在$\triangle A_1BD$ 的中心,所以点 H 是$\triangle A_1BD$ 的垂心,**故 C 正确**;

对于 D,因为点 H 是$\triangle A_1BD$ 的垂心,且为$\triangle A_1BD$ 的重心,如图,取 BD 的中点 O,连接 A_1O,则点 H 在 A_1O 上,且 $A_1H=\frac{2}{3}A_1O$,所以点 H 到底面 $B_1A_1D_1$ 的距离为$\frac{2}{3}AA_1=\frac{2}{3}$,

所以三棱锥 $B_1-HA_1D_1$ 的体积 $V_{B_1-HA_1D_1}=V_{H-B_1A_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$，**故 D 错误. 故选 D.**



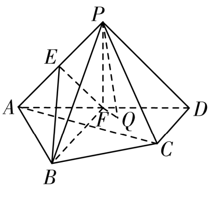
15. ABD

思路导引 由面面垂直的性质定理及线面垂直的判断定理可判断 A；取 AD 中点为 F，连接 EF，BF，则可得 $\angle BEF$（或其补角）为 BE 与 PD 所成角，由面面平行的判断定理以及性质定理可得 $BF\perp$ 平面 PAD，在 $Rt\triangle BEF$ 中，利用勾股定理求解即可；由题意可得三棱锥 $P-ACD$ 的外接球球心为 AC 的中点，求得其半径为 $\frac{3}{2}$，再求出外接球的表面积，即可判断 C；确定动点 Q 的轨迹是以 F 为圆心，1 为半径的半圆，即可判断 D.

【解析】因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，$CD\perp AD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，又因为 $AP\subset$ 平面 PAD，所以 $AP\perp CD$，

又因为 $AP\perp PD$，$PD\cap CD=D$，$PD\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AP\perp$ 平面 PCD，**故 A 正确；**



取 AD 的中点为 F，连接 EF，BF，

因为 E 为 AP 中点，所以 $EF//PD$，

所以 $\angle BEF$（或其补角）为 BE 与 PD 所成角，

又 $EF\not\subset$ 平面 PCD，$PD\subset$ 平面 PCD，所以 $EF//$ 平面 PCD，

又因为 $BE//$ 平面 PCD，$EF\cap BE=E$，$EF\subset$

平面 BEF, $BE\subset$平面 BEF,所以平面 $BEF/\!/$平面 PCD,

又平面 $BEF\cap$平面 $ABCD=BF$,平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$,所以 $CD/\!/BF$,

又 $CD\perp$平面 PAD,所以 $BF\perp$平面 PAD,而 $EF\subset$平面 PAD,所以 $BF\perp EF$,易知 $BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=2$,$EF=1$,

所以 $\tan\angle BEF=\dfrac{BF}{EF}=2$,**故 B 正确**;

因为$\triangle APC$ 和$\triangle ADC$ 为直角三角形,

所以三棱锥 $P-ACD$ 的外接球球心为 AC 的中点,

又因为 $AP=PD=2$,$\angle APD=90°$,

所以 $AD=2\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{8+1}=3$,所以外接球半径为$\dfrac{3}{2}$,

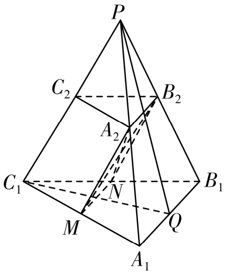
所以三棱锥 $P-ACD$ 的外接球的表面积为 $4\pi\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=9\pi$,**故 C 错误**;

连接 PF, FQ, PQ,则 PF 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高,

又 $PQ=\sqrt{3}$,$AD=2\sqrt{2}$,所以 $PF=\dfrac{1}{2}AD=\sqrt{2}$,故 $QF=\sqrt{PQ^2-PF^2}=1$,所以动点 Q 的轨迹是以 F 为圆心,1 为半径的半圆,其长度为 π,**故 D 正确. 故选 ABD.**

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

思路导引 将正三棱台补形为正三棱锥,再利用对角线互相垂直的平行四边形是菱形,从而可得该几何体为正四面体,进而在正四面体中求线面角的余弦值即可.



【解析】如图,延长 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 交于点 P,由于 $A_1B_1=2A_2B_2=4$,所以 A_2, B_2, C_2 分别为 PA_1, PB_1, PC_1 的中点,连接 MN, A_2M, B_2N.

因为 M, N 分别为棱 C_1A_1, C_1B_1 的中点,

所以 $MN // A_1B_1$，且 $MN=\frac{1}{2}A_1B_1$.

又因为 $A_2B_2 // A_1B_1$，且 $A_2B_2=\frac{1}{2}A_1B_1$，所以 $MN // A_2B_2$ 且 $A_2B_2=MN$，

即四边形 MNB_2A_2 是平行四边形，又因为 $A_2N \perp B_2M$，

所以四边形 MNB_2A_2 是菱形，即 $MN=MA_2$，

又因为 $MA_2=\frac{1}{2}PC_1$，$MN=\frac{1}{2}A_1B_1$，所以 $PC_1=A_1B_1$，

则 $PC_1=PA_1=PB_1=A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1$，

即四面体 $P-A_1B_1C_1$ 是正四面体.

设 Q 为 A_1B_1 的中点，连接 PQ，C_1Q，

可得 $C_1Q \perp A_1B_1$，$PQ \perp A_1B_1$，

又因为 $C_1Q \cap PQ=Q$，C_1Q，$PQ \subset$ 平面 PC_1Q，

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 PC_1Q，又因为 $A_1B_1 \subset$ 平面 PA_1B_1，

所以平面 $PA_1B_1 \perp$ 平面 PC_1Q，

即直线 C_1C_2 与平面 $A_1B_1B_2A_2$ 所成角为 $\angle C_1PQ$，

易知 $PC_1=4$，$PQ=2\sqrt{3}$，$C_1Q=2\sqrt{3}$，

则 $\cos\angle C_1PQ=\frac{4^2+12-12}{2\times4\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. (1)【**证明**】因为 E，F 分别是边 AB，AD 的中点，所以 $EF // BD$. 因为 $EF \not\subset$ 平面 BCD，$BD \subset$ 平面 BCD，所以 $EF //$ 平面 BCD.

(2)【**证明**】因为平面 $A_1BD \perp$ 平面 BCD，平面 $A_1BD \cap$ 平面 $BCD=BD$，$CD \subset$ 平面 BCD，$CD \perp BD$，所以 $CD \perp$ 平面 A_1BD. 因为 $A_1B \subset$ 平面 A_1BD，所以 $CD \perp A_1B$. 因为 $A_1B \perp A_1D$，$A_1D \cap CD=D$，A_1D，$CD \subset$ 平面 A_1CD，所以 $A_1B \perp$ 平面 A_1CD. 因为 $A_1B \subset$ 平面 A_1BC，所以平面 $A_1BC \perp$ 平面 A_1CD.

(3)【**解**】A_1C 与 BD 不可能垂直，理由如下.

假设 $A_1C \perp BD$，因为 $CD \perp BD$，$A_1C \cap CD=C$，A_1C，$CD \subset$ 平面 A_1CD，所以 $BD \perp$ 平面 A_1CD. 因为 $A_1D \subset$ 平面 A_1CD，所以 $BD \perp A_1D$，与 $A_1B \perp A_1D$ 矛盾，故 A_1C 与 BD 不

可能垂直.

能力上分

1. D 【解析】对于 A,若 $\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 m,n 可能平行、相交或异面,**故 A 错误**;

对于 B,若 m 不垂直于 α,且 $n\subset\alpha$,则 m 有可能与 n 异面垂直,**故 B 错误**;

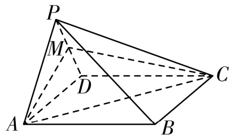
对于 C,若 $m//\alpha$,$\alpha//\beta$,则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$,**故 C 错误**;

对于 D,若 m,n 是异面直线,$m\subset\alpha$,$m//\beta$,$n\subset\beta$,$n//\alpha$,则在直线 m 上任取一点 P,过直线 n 与点 P 确定平面 γ,设 $\gamma\cap\alpha=c$,又 $n//\alpha$,则 $n//c$,$n\subset\beta$,$c\not\subset\beta$,所以 $c//\beta$,又 $m//\beta$,$m\subset\alpha$,$c\subset\alpha$,$m\cap c=P$,所以 $\alpha//\beta$,**故 D 正确**.

2. A 【解析】因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,

$CD\subset$ 平面 $ABCD$,$CD\perp AD$,所以 $CD\perp$ 平面 PAD,又 $CD\subset$ 平面 PCD,故平面 $PCD\perp$ 平面 PAD.

取 PD 的中点 M,连接 AM,CM,如图所示,



平面 $PCD\cap$ 平面 $PAD=PD$,平面 $AM\subset$ 平面 PAD,

$\triangle PAD$ 为等边三角形,则 $AM\perp PD$,故 $AM\perp$ 平面 PCD,

则直线 AC 与平面 PCD 所成角即为 $\angle ACM$.

令 $BC=a$,则 $AB=\sqrt{2}a$,$AC=\sqrt{3}a$,$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$,

故 $\sin\angle ACM=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{1}{2}$. **故选 A.**

3. C 【解析】对于①,由二面角 $A-BC-D$ 为直二面角,可得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,

又因为平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$,$CD\perp BC$,且 $CD\subset$ 平面 BCD,

所以 $CD\perp$ 平面 ABC,**所以①正确**;

对于②，由 $CD\perp$ 平面 ABC，且 $AB\subset$ 平面 ABC，可得 $AB\perp CD$，

又因为 $AB\perp AC$，且 $AC\cap CD=C$，AC，$CD\subset$ 平面 ACD，

所以 $AB\perp$ 平面 ACD，**所以②正确；**

对于③，由 $AB\perp$ 平面 ACD，且 $AB\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 ACD，**所以③正确；**

对于④，因为 $CD\perp$ 平面 ABC，且 $CD\subset$ 平面 BCD，可得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

若平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，且平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，可得 $AB\perp$ 平面 BCD，

又因为 $BC\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp BC$，

因为 AB 与 BC 不垂直，所以矛盾，所以平面 ABD 和平面 BCD 不垂直，**所以④错误. 故选 C.**

4. C 【解析】如图①所示，

取 AB 的中点 M，CD 的中点 N，连接 ME，MN，NF，EF，EN，易知 M，E，N，F 四点共面.

由 $\triangle EAB$ 是等腰直角三角形，$AE\perp BE$，

得 $ME\perp AB$，$MN\perp AB$，

又 $ME\cap MN=M$，

ME，$MN\subset$ 平面 $MENF$，

所以 $AB\perp$ 平面 $MENF$，

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 EAB，所以平面 $ABCD\perp$ 平面 $MENF$，平面 $EAB\perp$ 平面 $MENF$，又平面 $EAB//$ 平面 FDC，所以平面 $FDC\perp$ 平面 $MENF$，

又 $EF\subset$ 平面 $MENF$，且 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $MENF\cap$ 平面 $ABCD=MN$，

所以 $EF\perp MN$，

又平面 $EAB//$ 平面 FDC，且平面 $EAB\cap$ 平面 $MENF=ME$，平面 $FDC\cap$ 平面 $MENF=NF$，所以 $ME//NF$，

则作出平面 $MENF$ 的示意图，如图②所示，

设 $EF\cap MN=O$，则 $\triangle OME\backsim\triangle ONF$，所以 $\frac{OM}{ON}=\frac{ME}{NF}$，

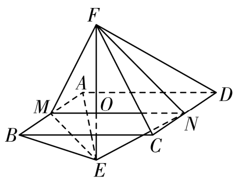
又 $ME=\frac{1}{2}AB=2$，$NF=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，则

$\dfrac{OM}{ON}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

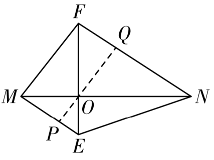
由 $MN=AD=3+\sqrt{3}$,所以 $OM=\sqrt{3}$, $ON=3$, $\angle EMO=\angle FNO=30°$,

过点 O 作 $PQ\perp ME$ 与 ME,NF 分别交于点 P,Q,则 PQ 的长即为两平面间的距离.

$PQ=OP+OQ=\dfrac{1}{2}OM+\dfrac{1}{2}ON=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$,**故选 C.**



图①



图②

5. 3 【**解析**】$\because AB\perp$ 平面 BCD, $AB\subset$ 平面 ABD, $AB\subset$ 平面 ABC,

$\therefore$ 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,又 $CD\subset$ 平面 BCD, $\therefore AB\perp CD$.

又 $BC\perp CD$, $AB\cap BC=B$, AB, $BC\subset$ 平面 ABC, $\therefore CD\perp$ 平面 ABC.

又 $CD\subset$ 平面 ACD, $\therefore$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC.

故互相垂直的平面有 3 对.

6. **思路导引** (1)由题意可求出 $AB=\sqrt{3}$,进而可知 $BC\perp AB$,由题可知 $PA\perp CB$,从而可证 $BC\perp$ 平面 PAB,再由线面平行的性质定理可得 $AD/\!/BC$,进而可得 $AD\perp$ 平面 PAB,再由线面垂直的性质可证 $AD\perp PB$. (2)(ⅰ)利用面面垂直的性质定理可得 $AQ\perp$ 平面 PCD,再利用线面垂直的性质可得 $AQ\perp CD$,进而可证 $CD\perp$ 平面 PAD,进而可证 $CD\perp AD$;(ⅱ)先找出二面角 $A\text{-}PC\text{-}D$ 的平面角,再在三角形中求解即可.

(1)【**证明**】在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=1$, $\angle BAC=30°$,

由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$,

即 $1=AB^2+4-2\sqrt{3}AB$,解得 $AB=\sqrt{3}$,

$\because AB^2+BC^2=3+1=4=AC^2$, $\therefore BC\perp AB$.

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$, $BC\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp BC$,

$\because AB\cap PA=A$, PA, $AB\subset$ 平面 PAB,

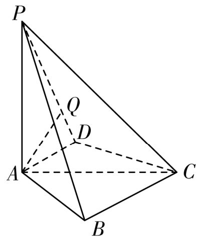
$\therefore BC\perp$ 平面 PAB,

$\because AD//$ 平面 PBC, $AD\subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$,

$\therefore AD//BC$, $\therefore AD\perp$ 平面 PAB,

$\because PB\subset$ 平面 PAB, $\therefore AD\perp PB$.

(2)(ⅰ)**【证明】**如图①所示,



图①

过点 A 作 $AQ\perp PD$ 于点 Q,

$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 PCD, 平面 $PAD\cap$ 平面 $PCD=PD$, $AQ\subset$ 平面 PAD,

$\therefore AQ\perp$ 平面 PCD,

$\because CD\subset$ 平面 PCD, $\therefore AQ\perp CD$,

又 $\because PA\perp$ 平面 $ABCD$, $CD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp CD$,

$\because PA\cap AQ=A$, PA, $AQ\subset$ 平面 PAD,

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD,

$\because AD\subset$ 平面 PAD, $\therefore CD\perp AD$.

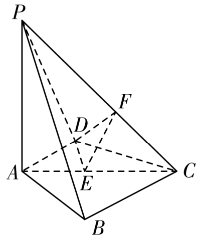
(ⅱ)**【解】**易知 $\angle CBA=90°$,

$\therefore \angle CBA=\angle CDA=90°$,

$\because CB=CD$, $AC=AC$, $\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADC$,

$\therefore AD=AB=\sqrt{3}$.

如图②所示,



图②

过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E, 过点 E 作 $EF\perp CP$ 于点 F, 连接 DF.

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$, $DE\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp DE$,

$\because PA\cap AC=A$, PA, $AC\subset$ 平面 PAC,

$\therefore DE\perp$ 平面 PAC,

$\because PC\subset$ 平面 PAC, $\therefore DE\perp PC$,

又 $EF\perp PC$, $DE\cap EF=E$, DE, $EF\subset$ 平面 DEF, $\therefore PC\perp$ 平面 DEF,

$\because DF\subset$ 平面 DEF, $\therefore PC\perp DF$,

$\therefore \angle DFE$ 为二面角 $A-PC-D$ 的平面角,

$\because \angle CDA=90^\circ$, $CD=1$, $AD=\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AC\times DE=\dfrac{1}{2}\times2\times DE=DE$,

$\therefore DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由(i)知 $CD\perp$ 平面 PAD,

$\because PD\subset$ 平面 PAD, $\therefore CD\perp PD$, 又 $PD=\sqrt{7}$, $PC=2\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle PDC}=\dfrac{1}{2}\times CD\times PD=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$,

又 $S_{\triangle PCD}=\dfrac{1}{2}\times PC\times DF=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times DF=\sqrt{2}DF$,

$\therefore \dfrac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{2}DF$, $\therefore DF=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

由 $DE\perp$ 平面 PAC, $EF\subset$ 平面 PAC, 知 $DE\perp EF$,

在 Rt $\triangle DEF$ 中, $\sin\angle DFE=\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

即二面角 $A-PC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

8.6 节测上分

1. A 【解析】对于 A, 若 $m\perp\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $m/\!/n$, **故 A 正确**;

对于 B, 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 α 与 β 可能平行或相交, **故 B 错误**;

对于 C, 若 $\alpha\perp\beta$, $m\perp\beta$, 则 $m/\!/\alpha$ 或 $m\subset\alpha$, **故 C 错误**;

对于 D, 若 $\alpha\perp\beta$, $m\perp\alpha$, $n/\!/\beta$, 则 m 与 n 可能相交、平行或异面, **故 D 错误. 故选 A.**

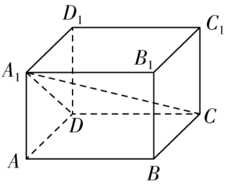
名师点拨 判断平行、垂直关系的选择题的注意点

(1)注意判定定理和性质定理中的关键点,比如线面垂直的判定定理中要求的“相交”;

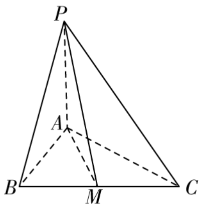
(2)结合题意构造图形,结合图形进行判断,学会善用正方体、棱锥等;

(3)会举反例或者用反证法推断结论是否正确.

2. C 【解析】如图,连接 A_1D,由长方体的性质可得 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1,故 A_1C 与平面 ADD_1A_1 所成的角为 $\alpha=\angle CA_1D$. 又 $A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1,故 $CD\perp A_1D$,即 $\angle CDA_1=\frac{\pi}{2}$. 因为 $AB /\!/ CD$,所以 A_1C 与 AB 所成的角等于 $\angle A_1CD$,即 $\beta=\angle A_1CD$. 又 $\angle A_1CD+\angle CA_1D+\angle CDA_1=\pi$,故 $\alpha+\beta=\pi-\angle CDA_1=\frac{\pi}{2}$. **故 C 正确.**

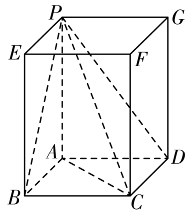


3. B 【解析】如图,连接 AM,由 $PA\perp$ 平面 ABC,$AM\subset$ 平面 ABC,可知 $PA\perp AM$,所以 $PM=\sqrt{PA^2+AM^2}$,要求 PM 的最小值只需求出 AM 的最小值即可. 在 $\triangle ABC$ 中,当 $AM\perp BC$ 时,AM 取得最小值,此时 $AM=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{2\times4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以 PM 的最小值为 $\sqrt{2^2+\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **故 B 正确.**



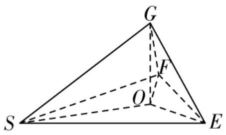
4. C 【解析】因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为正方形,所以可将四棱锥 $P-$

$ABCD$ 补成如图所示的长方体 $PEFG-ABCD$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球也是长方体 $PEFG-ABCD$ 的外接球.



由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，可知 $\angle PCA$ 就是 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角 θ，则 $\tan\theta=\frac{PA}{AC}=\frac{4}{AC}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $AC=3\sqrt{2}$. 设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的半径为 R，长方体 $PEFG-ABCD$ 的对角线 PC 即为其外接球的直径，所以 $PC=2R=\sqrt{AC^2+PA^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{34}$，所以 $R=\frac{\sqrt{34}}{2}$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=34\pi$. **故 C 正确.**

5. A 【解析】如图所示，连接 OF，OS，OE.



由题意知 $GS\perp GF$，$GE\perp GF$. 因为 GS，$GE\subset$ 平面 GES，$GS\cap GE=G$，所以 $GF\perp$ 平面 GES. 因为 $SE\subset$ 平面 GES，所以 $GF\perp SE$. 因为 $GO\perp$ 平面 SEF，$SE\subset$ 平面 SEF，所以 $GO\perp SE$. 又因为 GO，$GF\subset$ 平面 GFO，$GO\cap GF=G$，所以 $SE\perp$ 平面 GFO. 因为 $OF\subset$ 平面 GFO，所以 $SE\perp OF$. 同理，$EF\perp OS$，$SF\perp OE$，则 O 是 $\triangle SEF$ 的垂心. **故 A 正确.**

6. D 【解析】对于 A，依题意有 $DA\perp$ 平面 ABC，$DA\subset$ 平面 DAC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 DAC，**故 A 正确**；

对于 B，$DA\perp$ 平面 ABC，$CB\subset$ 平面 ABC，则有 $DA\perp CB$，又 AC 是圆 O 的直径，B 为圆周上不与点 A，C 重合的点，则有 $AB\perp CB$，又 $DA\cap AB=A$，DA，$AB\subset$ 平面 BAD，所以 $CB\perp$ 平面 BAD，**故 B 正确**；

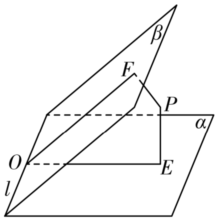
对于 C，因为 $CB\perp$ 平面 BAD，$AN\subset$ 平面 BAD，所以 $CB\perp AN$，又 $AN\perp DB$ 于点 N，$CB\cap DB=B$，CB，$DB\subset$ 平面 BCD，所以 $AN\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，则 $AN\perp CD$，又 $AM\perp DC$ 于点 M，AN，$AM\subset$ 平面 AMN，$AN\cap AM=A$，所以 $CD\perp$ 平面 AMN，**故 C 正确；**

对于 D，平面 $AMN\cap$ 平面 $DAB=AN$，$DB\subset$ 平面 DAB，$AN\perp DB$ 于 N，若平面 $AMN\perp$ 平面 DAB，则必有 $DB\perp$ 平面 AMN，而 $MN\subset$ 平面 AMN，则必有 $DB\perp MN$，因为 $CB\perp$ 平面 BAD，$DB\subset$ 平面 BAD，则有 $CB\perp DB$，又 MN，$BC\subset$ 平面 DBC，则必有 $MN/\!/BC$，由于 DA 垂直于圆 O 所在的平面，$\angle DCA=45°$，则 $DA=AC$，而 $AM\perp DC$ 于点 M，则 M 为 DC 中点，因为 AC 是圆 O 的直径，B 为圆周上不与点 A，C 重合的点，所以 $AB<AC=DA$，又 $AN\perp DB$ 于点 N，则 N 不是 DB 中点（否则会得到 $AB=AD$，与 $AB<AD$ 矛盾），所以 $MN/\!/BC$ 不成立，所以平面 AMN 与平面 DAB 不垂直，**故 D 错误.**

7. C 【**解析**】依题意，点 P 不在平面 α 和平面 β 内，当点 P 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 内部时，如图①，

设直线 $l\cap$ 平面 $EPF=O$，连接 EO，FO，因为 $PE\perp\alpha$，$PF\perp\beta$，$l\subset\alpha$，$l\subset\beta$，所以 $l\perp PE$，$l\perp PF$，因为 $PE\cap PF=P$，PE，$PF\subset$ 平面 EPF，所以直线 $l\perp$ 平面 EPF，又 OE，$OF\subset$ 平面 EPF，所以 $l\perp OE$，$l\perp OF$，则 $\angle EOF$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角.

在四边形 $PEOF$ 中，$\angle PEO=\angle PFO=90°$，$\angle EOF=60°$，所以 $\angle EPF=120°$.



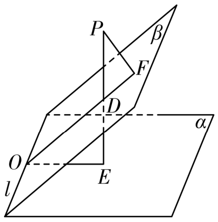
图①

当点 P 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 外部时，如图②，同理可得 $\angle EOF$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，

令 $PE\cap OF=D$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DFP$ 中，$\angle ODE=\angle PDF$，则 $\angle EOF=\angle EPF=60^{\circ}$，

所以 $\angle EPF$ 的大小为 60° 或 120°.

故选 C.



图②

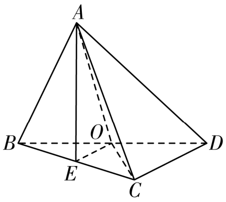
8.【证明】$\because AA_1\perp$ 底面 ABC，$\therefore$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，又 $BC=CC_1$，$\therefore$ 四边形 BCC_1B_1 是正方形，连接 B_1C（图略），$\therefore BC_1\perp B_1C$. 易知 $A_1C_1\perp CC_1$，$\because A_1C_1\perp B_1C_1$，且 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$，CC_1，$B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1. $\because AC\,/\!/\,A_1C_1$，$\therefore AC\perp$ 平面 BCC_1B_1. $\because BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$\therefore BC_1\perp AC$，$\because AC\cap B_1C=C$，AC，$B_1C\subset$ 平面 ACB_1，$\therefore BC_1\perp$ 平面 ACB_1，又 $AB_1\subset$ 平面 ACB_1，$\therefore AB_1\perp BC_1$.

9.（1）【证明】$\because \triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形，O 为 BD 的中点，$\therefore OB=OC=OD=CD=1$，$\angle BOC=120^{\circ}$，$\therefore \angle OCB=\angle OBC=30^{\circ}$，$\therefore \angle BCD=90^{\circ}$，即 $CD\perp BC$. 又 $CD\perp AB$，$AB\cap BC=B$，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore CD\perp$ 平面 ABC.

（2）【解】由（1）知 $CD\perp$ 平面 ABC，且 $CD\subset$ 平面 BCD，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD.

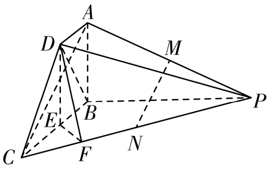
如图，取 BC 的中点 E，连接 AE，OE，$\because AB=AC$，$\therefore AE\perp BC$，又平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，$\therefore AE\perp$ 平面 BCD，$\therefore \angle AOE$ 即为 AO 与平面 BCD 所成的角，$\therefore \angle AOE=60^{\circ}$. $\because OE$ 为 $\triangle BCD$ 的中位线，$\therefore OE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$. $\because OE\subset$ 平面 BCD，$\therefore AE\perp OE$，$\therefore \triangle AOE$ 为直角三角形，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，$\tan 60^{\circ}=\frac{AE}{OE}$，$\therefore AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又易知 $BC=\sqrt{3}$，故三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times BC\times CD\times AE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$.



10. (1)【证明】如图,连接 AC.

因为 M 为棱 AP 的中点,N 为棱 CP 的中点,所以 $MN//AC$,又 $MN\not\subset$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,所以 $MN//$平面 $ABCD$.



(2)【证明】在四边形 $ABCD$ 中,$AD//BC$,$\angle ABC=90°$,$2AB=2AD=\sqrt{2}CD=BC=2$,则 $AB=AD=1$,$CD=\sqrt{2}$,$BC=2$,连接 BD,则 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{2}$,则 $BD^2+CD^2=BC^2$,则 $CD\perp DB$,所以$\triangle ABD$,$\triangle BCD$ 都是等腰直角三角形. 又平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,$\angle PBC=90°$,即 $PB\perp BC$,平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$,$PB\subset$平面 PBC,所以 $PB\perp$平面 $ABCD$. 又 $CD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PB\perp CD$. 又 $PB\cap DB=B$,PB,$DB\subset$平面 PBD,所以 $CD\perp$平面 PBD. 又 $PD\subset$平面 PBD,所以 $CD\perp PD$.

(3)【解】由(2)知,$PB\perp$平面 $ABCD$,则$\angle PDB$ 为直线 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角,因为 $BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $BP\perp BD$,则 $\cos\angle PDB=\frac{DB}{PD}=\frac{\sqrt{2}}{PD}=\frac{1}{3}$,所以 $PD=3\sqrt{2}$,则 $PB=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$.

如图,取 BC 的中点 E,连接 DE,过 E 作 PC 的垂线交 PC 于 F,连接 DF,易知 $DE\perp BC$,$DE\subset$平面 $ABCD$,平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$,则 $DE\perp$平面 PBC.

因为 $PC\subset$平面 PBC,所以 $DE\perp PC$,又 $EF\perp PC$,EF,$DE\subset$平面 DEF,$EF\cap DE=E$,所以 $PC\perp$平面 DEF. 又 $DF\subset$平面 DEF,所以 $DF\perp PC$,则$\angle DFE$ 即为二面角 $B-PC-D$ 的平面角.

易知$\triangle CFE\backsim\triangle CBP$,所以$\frac{CF}{EF}=\frac{CB}{PB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,则$CF=\frac{1}{2}EF$. 又$CE=DE=\frac{1}{2}BC=1$,则在$\mathrm{Rt}\triangle CEF$中,由勾股定理得$CF^2+EF^2=CE^2=1$,则$EF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$\tan\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,即二面角$B-PC-D$的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

规律方法 二面角的求解方法

(1)作出辅助线,找到二面角的平面角,并结合余弦定理或勾股定理进行求解.

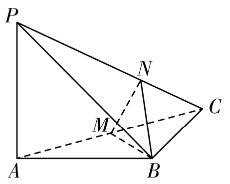
(2)利用其中一个半平面上的图形在另一个半平面所在平面的投影图形面积与原图形的面积之比求解二面角的余弦值,若二面角的平面角为钝角,所得结果需取相反数,进而求得二面角的大小.

(3)求出一个半平面上一点(不在棱上)到另一个半平面所在平面的距离和此点到棱的距离之比即为二面角的正弦值,进而求得二面角的大小

11. (1)【证明】因为平面$PAC\perp$平面ABC,$PA\subset$平面PAC,$PA\perp AC$,平面$PAC\cap$平面$ABC=AC$,所以$PA\perp$平面ABC. 又$BC\subset$平面ABC,所以$PA\perp BC$. 因为$PA=1$,$PC=\sqrt{3}$,$PA\perp AC$,所以$AC=\sqrt{PC^2-PA^2}=\sqrt{2}$. 因为$AB=BC=1$,所以$AC^2=AB^2+BC^2$,所以$AB\perp BC$. 又$PA\perp BC$,$PA$,$AB$是平面$PAB$内的两条相交直线,所以$BC\perp$平面$PAB$. 因为$BC\subset$平面$PBC$,所以平面$PBC\perp$平面$PAB$.

(2)【解】存在,当$\frac{PN}{PC}=\frac{2}{3}$时,$PC\perp$平面$BMN$.

如图,过点M作$MN\perp PC$,垂足为N,连接BN.



由(1)知 $PA\perp$ 平面 ABC，$MB\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp MB$. 因为点 M 为 AC 的中点，$AB=BC=1$，所以 $MB\perp AC$. 因为 PA,AC 是平面 PAC 内的两条相交直线，所以 $MB\perp$ 平面 PAC. 因为 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $MB\perp PC$，又 $MN\perp PC$，MB,MN 是平面 BMN 内的两条相交直线，所以 $PC\perp$ 平面 BMN. 由已知得 $\sin\angle PCA=\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{MN}{MC}$，又 $MC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{MN}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

解得 $MN=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

又 $CN=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $PN=PC-CN=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\dfrac{PN}{PC}=\dfrac{2}{3}$.

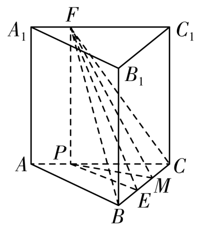
故当 $\dfrac{PN}{PC}=\dfrac{2}{3}$ 时，$PC\perp$ 平面 BMN.

专题上分 4 空间角和距离的求解

1. A 【解析】如图所示，过点 F 作 $FP\perp AC$ 于点 P，过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，连接 PE,BF,FM,FC，易知 $FP/\!/AA_1$，

因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC，所以 $FP\perp$ 底面 ABC.

因为 $BC\subset$ 底面 ABC，所以 $FP\perp BC$，又 $PM\perp BC$，$FP\cap PM=P$，$FP,PM\subset$ 平面 FPM，所以 $BC\perp$ 平面 FPM，又 $FM\subset$ 平面 FPM，所以 $BC\perp FM$. 则 $\alpha=\angle EFP$，$\beta=\angle FEP$，$\gamma=\angle FMP$，$\tan\alpha=\dfrac{PE}{FP}=\dfrac{PE}{AB}\leqslant 1$，$\tan\beta=\dfrac{FP}{PE}=\dfrac{AB}{PE}\geqslant 1$，$\tan\gamma=\dfrac{FP}{PM}\geqslant\dfrac{FP}{PE}=\tan\beta$，所以 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，**故 A 正确**.



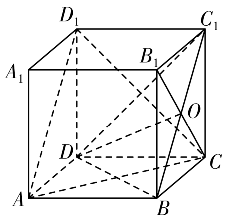
2. ABD 【解析】连接 B_1C 交 BC_1 于点 O，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$B_1C\perp BC_1$，即 $CO\perp BC_1$，

又 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$CO\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp CO$，又 $AB\cap BC_1=B$，$AB,BC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1，所以 $CO\perp$ 平面 ABC_1D_1，则 $\angle CBO$ 就是直线 BC 与平面 ABC_1D_1 所成的角，$\sin\angle CBO=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，**故 A 正确；**

易知 $BC_1/\!/AD_1$，所以 $\angle AD_1C$ 就是异面直线 D_1C 和 BC_1 所成角（或其补角），又 $AD_1=D_1C=AC=\sqrt{2}$，所以 $\angle AD_1C=\dfrac{\pi}{3}$，**故 B 正确；**

因为 $CO\perp$ 平面 ABC_1D_1，所以 $V_{C-ABC_1D_1}=\dfrac{1}{3}\times1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{3}$，**故 C 错误；**

连接 DO，因为 $DB=DC_1=\sqrt{2}$，且点 O 为 BC_1 中点，所以 $DO\perp BC_1$，又 $CO\perp BC_1$，所以 $\angle COD$ 就是二面角 $C-BC_1-D$ 的平面角，又 $DO=\sqrt{2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $\cos\angle COD=\dfrac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}-1}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，**故 D 正确. 故选 ABD.**



3. $\sqrt{6}$　$\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

思路导引 利用二面角的定义找到 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角，当二面角 $B'-AC-D$ 为直二面角时，易得到 $B'D=\sqrt{B'E^2+ED^2}=\sqrt{6}$；当三棱锥 $B'-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求出 B' 到平面 ACD 的距离 $d=B'O=\dfrac{3}{2}$，再结合三角函数计算即可.

【解析】如图，将菱形 $ABCD$ 沿 AC 将 $\triangle ABC$ 折起得到二面角 $B'-AC-D$，

取 AC 的中点 E，连接 $B'E,ED,B'D$，

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $AB'=B'C=AC=AD=CD=2$，

所以 $B'E\perp AC$，$ED\perp AC$，且 $B'E=ED=\sqrt{3}$，

所以 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角，

当二面角 $B'-AC-D$ 为直二面角时，$\angle B'ED=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $B'D=\sqrt{B'E^2+ED^2}=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$.

当三棱锥 $B'-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，记 B' 到平面 ACD 的距离为 d，

则 $V_{B'-ACD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin\dfrac{\pi}{3}\times d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $d=\dfrac{3}{2}$.

过点 B' 作 $B'O\perp ED$ 于点 O，

因为 $B'E\perp AC$，$ED\perp AC$，且 $B'E\cap ED=E$，$B'E$，$ED\subset$ 平面 $B'ED$，所以 $AC\perp$ 平面 $B'ED$，

因为 $B'O\subset$ 平面 $B'ED$，所以 $AC\perp B'O$，

又因为 $AC\cap ED=E$，AC，$ED\subset$ 平面 ACD，

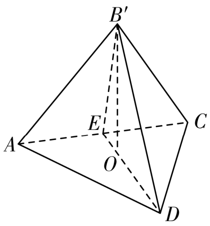
所以 $B'O\perp$ 平面 ACD，故 B' 到平面 ACD 的距离 $d=B'O=\dfrac{3}{2}$，

因为 $B'O\perp ED$，所以 $\triangle B'OE$ 为直角三角形，

因为 $B'E=\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle B'ED=\dfrac{B'O}{B'E}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\angle B'ED$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角，所以 $\angle B'ED\in[0,\pi]$，

所以 $\angle B'ED=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\angle B'ED=\dfrac{2\pi}{3}$.



4.【解】(1) 连接 MN，C_1A，C_1M. 由 M，N 分别是棱 BC，BA 的中点，

根据三角形中位线定理，得 $MN//AC$，且 $MN=\frac{AC}{2}=1$，

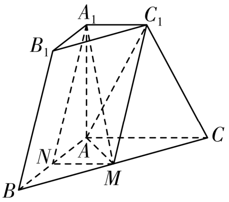
在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，可得 $A_1C_1//AC$，所以 $MN//A_1C_1$，

由 $MN=A_1C_1=1$，可得四边形 MNA_1C_1 是平行四边形，则 $A_1N//MC_1$，

所以 $\angle CC_1M$ 为 A_1N 与 CC_1 所成角，

在 $\triangle CC_1M$ 中，可知 $CC_1=\sqrt{5}$，$C_1M=A_1N=\sqrt{5}$，$CM=\sqrt{2}$，

则 $\cos\angle CC_1M=\frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$.



(2) 因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，AM，$AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1A\perp AM$，$A_1A\perp AC$，

又 AM，AC 分别在平面 A_1MA 与平面 ACC_1A_1 内，

平面 $A_1MA\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AA_1$，

所以 $\angle CAM$ 即为二面角 $M-AA_1-C$ 的平面角，

又 $AB\perp AC$，$AB=AC$，M 是棱 BC 的中点，

所以 $\angle CAM=\frac{\pi}{4}$，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

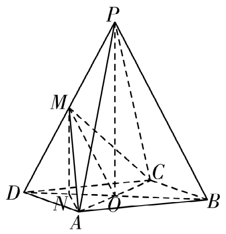
所以二面角 $M-AA_1-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. (1)【证明】如图，连接 OM，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\because$ O 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore$ O 为 BD 的中点，又 M 为 PD 的中点，$\therefore$ $PB//MO$. 又 $PB\not\subset$ 平面 ACM，$MO\subset$ 平面 ACM，$\therefore$ $PB//$ 平面 ACM.

(2)【证明】$\because$ $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ $BC\perp PO$. 在 $\triangle ADC$ 中，$\because$ $AD=AC$，$\angle ADC=45°$，$\therefore$ $AD\perp AC$，又 $AD//BC$，$\therefore$ $BC\perp AC$. $\because$ $PO\cap AC=O$，$PO\subset$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PAC，又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC.

(3)【解】如图，取 DO 的中点 N，连接 MN，AN. $\because$ M 为 PD 的中点，$\therefore$ $MN//PO$，且 $MN=\frac{1}{2}PO=1$. 由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，得

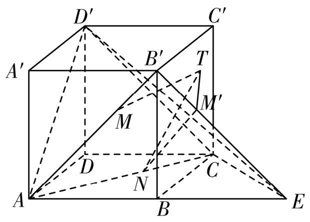
$MN\perp$平面$ABCD$，$\therefore \angle MAN$是直线AM与平面$ABCD$所成的角. 由（2）可知，$\angle CAD=90°$，在 Rt$\triangle DAO$ 中，$AD=2$，$AO=\frac{1}{2}AC=1$，$\therefore DO=\sqrt{5}$，从而$AN=\frac{1}{2}DO=\frac{\sqrt{5}}{2}$. $\because AN\subset$平面$ABCD$，$\therefore MN\perp AN$. 在Rt$\triangle ANM$中，$\tan\angle MAN=\frac{MN}{AN}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$直线$AM$与平面$ABCD$所成角的正切值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



6. A

思路导引 先作A点关于直线BC的对称点为E，连接$B'E$，BE，作M点关于直线BB'的对称点为M'，连接$M'N$，$M'T$，记d为直线EB'与AC之间的距离，可得$MT+NT=M'T+NT\geqslant M'N\geqslant d$，再把异面直线间距离转化为点到平面的距离，利用等体积法求解.

【解析】如图，作A点关于直线BC的对称点为E，连接$B'E$，BE，作M点关于直线BB'的对称点为M'，连接$M'N$，$M'T$，



记d为直线EB'与AC之间的距离，则$MT+NT=M'T+NT\geqslant M'N\geqslant d$.

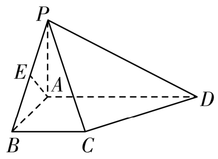
连接$D'C$，AD'，易知$B'E/\!/D'C$，又$B'E\not\subset$平面ACD'，$D'C\subset$平面ACD'，可得$B'E/\!/$平面ACD'，则d为直线$B'E$到平面ACD'的距离，即点E到平面ACD'的距离，连接CE，$D'E$，

易知$V_{D'-ACE}=\frac{1}{3}\times3\times S_{\triangle ACE}=\frac{1}{3}\times3\times$

$\left(\frac{1}{2}\times6\times3\right)=9$,

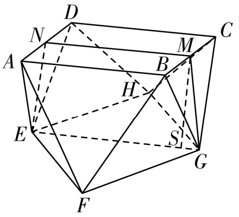
$V_{D'-ACE}=V_{E-ACD'}=\frac{1}{3}\times d\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=\frac{3\sqrt{3}d}{2}$,解得 $d=2\sqrt{3}$. **故选 A.**

7. C　【解析】如图,在平面 PAB 中过点 A 作 $AE\perp PB$,垂足为点 E.



因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $\angle PBA$ 为 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角,则 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$. 又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,又 $PA=1$,所以 $AB=1$,$PB=\sqrt{2}$,$AE=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,所以 $BC\perp AB$. 因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$. 又 $AB\cap PA=A$,$AB,PA\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp$ 平面 PAB. 因为 $AE\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp AE$. 又 $AE\perp PB$,$BC\cap PB=B$,$BC,PB\subset$ 平面 PBC,所以 $AE\perp$ 平面 PBC. 所以点 A 到平面 PBC 的距离为 $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **故 C 正确.**

8. B　【解析】如图,分别取 BC,AD 的中点 M,N,连接 MN,MG,NE,EG,



易知四边形 $EGMN$ 为等腰梯形,

根据题意可知 $BC\perp MN$,$BC\perp MG$,

而 $MN\cap MG=M$,$MN,MG\subset$ 平面 $EGMN$,

故 $BC\perp$ 平面 $EGMN$,又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$,

故平面 $ABCD\perp$ 平面 $EGMN$,则平面 $EFGH\perp$ 平面 $EGMN$,

作 $MS\perp EG$,垂足为 S,平面 $EFGH\cap$ 平面 $EGMN=EG$,

$MS\subset$ 平面 $EGMN$,故 $MS\perp$ 平面 $EFGH$,

则梯形 $EGMN$ 的高即为平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离.

易知 $MG=\sqrt{3}$，$SG=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$，

故 $MS=\sqrt{MG^2-SG^2}=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$，

即平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离为 $\sqrt[4]{8}$，**故选** B.

9. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【**解析**】由题知，$A_1B_1 /\!/ EF$，且 $A_1B_1 \not\subset$ 平面 D_1EF，$EF \subset$ 平面 D_1EF，所以 $A_1B_1 /\!/$ 平面 D_1EF，则 A_1B_1 到平面 D_1EF 的距离为点 A_1 到平面 D_1EF 的距离. 显然 $EF \perp$ 平面 D_1A_1E，连接 A_1F（图略），对于三棱锥 A_1-D_1EF，有 $V_{A_1-D_1EF}=V_{F-D_1A_1E}$，设点 A_1 到平面 D_1EF 的距离为 h，由题意得 $A_1E=\frac{1}{2}$，$EF=1$，$D_1A_1=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1EF$ 中，得 $D_1E=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 由 $\frac{1}{3}\times EF\times S_{\triangle D_1A_1E}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle D_1EF}$，得 $\frac{1}{3}\times EF\times\frac{1}{2}\times D_1A_1\times A_1E=\frac{1}{3}h\times\frac{1}{2}\times EF\times D_1E$，即 $\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}h\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 A_1B_1 到平面 D_1EF 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

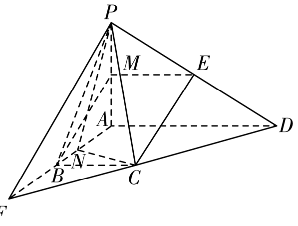
10. **思路导引** (1) 取 PA 的中点 M，连接 BM，EM，证明 $CE /\!/ BM$，再由线面平行的判定定理即可证得 $CE /\!/$ 平面 PAB. (2) 由 (1) 所得结论，利用线面平行的性质定理可得 $CE /\!/ PF$，由题意可知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，从而 $PA \perp AB$，利用中点结合平面几何知识可求得 $BM=\frac{\sqrt{7}}{2}$，进而求得 PF 的长度. (3) 过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 N，连接 PN，由题意，$\angle CPN$ 为 PC 与平面 PAB 所成角. 由 $\tan\angle CPN=\frac{CN}{PN}$ 得 $CN=\frac{\sqrt{3}}{3}PN \geqslant 1$，又 $CE /\!/$ 平面 PAB，所以直线 CE 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离，进而得直线 CE 到平面 PAB 的距离的最小值.

(1)【**证明**】如图，取 PA 的中点 M，连接 BM，EM.

因为 E 为 PD 的中点,所以 $EM/\!/AD$,且 $EM=\frac{1}{2}AD$.

根据题意可知 $BC/\!/AD$,且 $BC=\frac{1}{2}AD$,

从而可得 $BC/\!/EM$,且 $BC=EM$,



即可得四边形 $BCEM$ 为平行四边形,

即可得 $CE/\!/BM$,又 $BM\subset$平面 PAB,$CE\not\subset$平面 PAB,

所以 $CE/\!/$平面 PAB.

(2)【解】由(1)可知 $CE/\!/$平面 PAB,$CE\subset$平面 PDC,平面 $PAB\cap$平面 $PCD=l$,

所以 $CE/\!/l$,如图所示,因为 l 交平面 $ABCD$ 于点 F,所以直线 l 与直线 PF 重合,即可得 $CE/\!/PF$. 连接 CF,BF,

在$\triangle PDF$ 中,点 E 是 PD 的中点,所以 $PF=2CE$.

结合(1)可知 $PF=2BM$.

又点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为$\sqrt{3}$,且 $PA=\sqrt{3}$,所以 $PA\perp$平面 $ABCD$,

又 $AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$.

在$\triangle ABM$ 中,$\angle MAB=\frac{\pi}{2}$,$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$AB=1$,根据勾股定理可得 $BM=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

从而可得 $PF=\sqrt{7}$.

(3)【解】过点 C 作 AB 的垂线,垂足为 N,连接 PN.

因为平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$,$CN\subset$平面 $ABCD$,所以 $CN\perp$平面 PAB,

所以$\angle CPN$ 为 PC 与平面 PAB 所成角.

由题意可得$\angle CPN=\frac{\pi}{6}$,在$\triangle CPN$ 中,

$\angle CNP=\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{CN}{PN}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

从而可得 $CN=\frac{\sqrt{3}}{3}PN$.

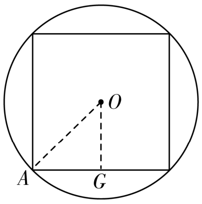
又点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为$\sqrt{3}$,

所以 $PN\geqslant\sqrt{3}$，从而可得 CN 的最小值为 1，即点 C 到平面 PAB 的距离的最小值为 1.

由(1)可知 $CE//$平面 PAB，所以直线 CE 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离，故直线 CE 到平面 PAB 的距离的最小值为 1.

专题上分 5 球的切、接问题

1. A 【解析】如图为圆柱与其外接球的轴截面，O 为球心，连接 OA，作 $OG\perp AG$，设圆柱的高为 h，底面半径为 r，则 $OG=\frac{h}{2}$，$GA=r$，由题知 $OA=2\sqrt{3}$，则 $\frac{h^2}{4}+r^2=12$. 圆柱的体积 $V=\pi r^2\cdot h=\pi\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot h^2}=\pi\sqrt{2\left(r^2\cdot r^2\cdot\frac{h^2}{2}\right)}\leqslant\pi\sqrt{2\left(\frac{r^2+r^2+\frac{h^2}{2}}{3}\right)^3}=\pi\times\sqrt{2\times8^3}=32\pi$，当且仅当 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}h$，即 $r=2\sqrt{2}$，$h=4$ 时等号成立. **故 A 正确.**

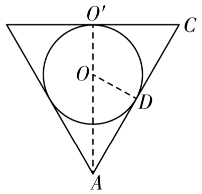


2. $\frac{256}{3}\pi$　$\sqrt{3}+2$　【解析】连接 BC，AB，AC(图略)，则 $\triangle ABC$ 为等边三角形，设圆柱底面半径为 R，高为 h，小球的半径为 r，则 $h=4r$，$2R=\sqrt{3}r+2r$，故 $R=\frac{\sqrt{3}r+2r}{2}=4+2\sqrt{3}$，解得 $r=4$，故 $h=16$，则球 A 的体积为 $\frac{4\pi\times4^3}{3}=\frac{256\pi}{3}$，圆柱的侧面积为 $2\pi Rh=2\pi(2\sqrt{3}+4)\times16=32\pi(2\sqrt{3}+4)$，球 B 的表面积为 $4\pi\times16=64\pi$，故圆柱的侧面积与球 B 的表面积的比值为 $\frac{32\pi(2\sqrt{3}+4)}{64\pi}=\sqrt{3}+2$.

3. A 【解析】由题意可得，圆锥的底面圆周长为 $2\pi\times2=4\pi$，则母线长 $l=\frac{4\pi}{\frac{2\pi}{3}}=6$，

高 $h=\sqrt{l^2-2^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，由圆锥的顶点和底面圆周都在球 O 的球面上，可知 O 在圆锥的高所在的直线上. 设球 O 的半径为 R，则有 $(h-R)^2+2^2=R^2$，解得 $R=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，则球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^3=\frac{243\sqrt{2}\pi}{8}$. **故 A 正确.**

4. C 【解析】由题可知，该容器为圆锥，冰球内切于该容器，如图，作出容器与冰球的轴截面，设冰球球心为 O，容器底面圆圆心为 O'，过点 O 作 $OD\perp AC$，垂足为 D，连接 AO'. 由题知，冰球的半径 $r=OD=6$ cm，$\angle OAD=30°$，则 $OA=2r=12$ cm，$OO'=r=6$ cm，$AO'=18$ cm，容器底面半径 $R=O'C=18\times\tan 30°=6\sqrt{3}$ (cm). 则原来该容器内饮料的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times(6\sqrt{3})^2\times18-\frac{4}{3}\pi\times6^3=360\pi$ (cm^3). **故 C 正确.**



5. C 【解析】要将长方体铁块磨制成一个球体，则球体直径最大不超过长方体的最短棱长，

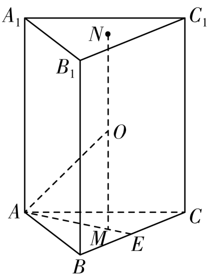
又长方体的最短棱长为 3，则此球是棱长为 3 的正方体的内切球，

根据正方体的几何特征知，此球的直径与正方体的棱长是相等的，故可得此球的直径为 3，

所以此球的半径为 $\frac{3}{2}$，其表面积 $S=4\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=9\pi$. **故选 C.**

6. D 【解析】由题可知，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱. 如图，设 N,M 分别是正三棱柱上、下底面中心，连接 MN，则 MN 是棱柱的高，MN 的中点 O 是该三棱柱外接球的球心，设 BC 的中点为 E，连

接 AE,AO. 由 $\triangle ABC$ 为正三角形,可知 $AM=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=2$,则三棱柱外接球半径 $R=\sqrt{AM^2+OM^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$,从而外接球体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times27=36\pi$. **故 D 正确.**



7. C 【解析】由正四面体可以在棱长为 6 的正方体纸盒内任意转动,得该正四面体的棱长最大时,其外接球为棱长为 6 的正方体的内切球.

如图,设四面体 B_1-ACD_1 的棱长为 a,其外接正方体为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,则该正方体的棱长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 与正四面体 B_1-ACD_1 有同一个外接球,

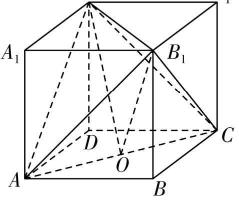
设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的半径为 R,则 $2R=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a$,即 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$,

而棱长为 6 的正方体的内切球的半径为 3,即$\frac{\sqrt{6}}{4}a=3$,解得 $a=2\sqrt{6}$.

取 AC 中点 O,连接 D_1O,B_1O,则 $D_1O\perp AC,B_1O\perp AC$,又 $D_1O\cap B_1O=O$, D_1O, $B_1O\subset$平面 B_1OD_1,

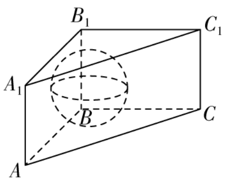
所以 $AC\perp$平面 B_1OD_1,又 $D_1O=B_1O$,等腰三角形 B_1OD_1 底边 B_1D_1 上的高 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a=2\sqrt{3}$,

所以所求正四面体体积的最大值 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1OD_1}\cdot AC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{3}$. **故选 C.**



8. $\frac{4}{29}$ 【解析】设 $BC=3a$，因为 $AB\perp BC$，$\tan\angle BAC=\frac{3}{4}$，所以 $AB=4a$，$AC=5a$. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为 r，则 $\frac{1}{2}(AB+BC+AC)r=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，即 $\frac{1}{2}(4a+3a+5a)r=\frac{1}{2}\times4a\times3a$，解得 $r=a$. 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 有一个与三棱柱的五个面均相切的内切球，所以内切球半径为 a，$AA_1=2a$. 因为 $AB\perp BC$，所以直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的直径就是以 BA,BC,BB_1 为棱的长方体的体对角线，则外接球直径为 $\sqrt{BB_1^2+BA^2+BC^2}=\sqrt{4a^2+16a^2+9a^2}=\sqrt{29}a$.

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球的表面积为 $4\pi a^2$，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $29\pi a^2$，所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的内切球与外接球的表面积之比为 $\frac{4}{29}$.



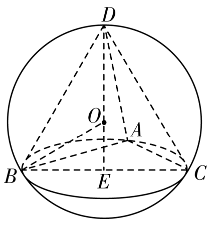
9. D 【解析】如图所示，不妨设 A,B,C,D 在球 O 上，$AB\perp AC$，$AB=AC=a$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2=3$，所以 $a=\sqrt{6}$，

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 E，半径为 r，则 $r=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，连接 OB,DE，

则球心 O 到平面 ABC 的距离 $OE=\sqrt{OB^2-r^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

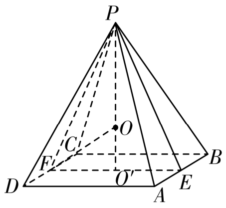
当 D,O,E 三点共线且 O 在线段 DE 上时，三棱锥 $D-ABC$ 的高最大，最大值为 $1+2=3$，

此时三棱锥 $D-ABC$ 的体积也最大，最大值为 $\frac{1}{3}\times3\times3=3$. **故选 D.**



10. B 【解析】设正四棱锥内切球球心为 O，点 O 在底面 $ABCD$ 的射影为 O'，内切球半径为 r，则 P,O,O' 三点共线，连接 PO'，

取 AB 中点 E，CD 中点 F，连接 PF,PE,EF，则正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球的半径即为 $\triangle PEF$ 的内切圆的半径.



因为正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 3，

所以 $EF=3$，$O'F=\frac{1}{2}EF=\frac{3}{2}$，

因为正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $PO'=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，则 $PE=PF=3$，连接 OF，

所以 $OF=OP=PO'-OO'=\frac{3\sqrt{3}}{2}-r$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'F$ 中，$O'O^2+O'F^2=OF^2$，即 $r^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-r\right)^2$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则其内切球的体积是 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. 故选 B.

11. A 【解析】因为正四面体的棱长为 4，

所以底面正三角形的高 $h_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$，

底面中心 O 到底面顶点的距离 $r_0=\frac{2}{3}h_0=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 连接 DO,AO，

根据勾股定理可得正四面体的高 $h=\sqrt{16-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

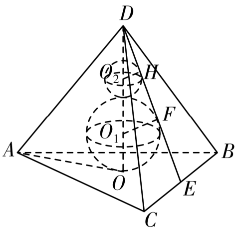
则正四面体的体积 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times h_0\times h=\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

设正四面体的内切球半径为 r_1，则 $V_{A-BCD}=4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times h_0\times r_1=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，解得 $r_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设球 O_2 的半径为 r_2，取 BC 中点 E，连接 DE，过点 O_1 作 $O_1F\perp DE$ 于点 F，过点 O_2 作 $O_2H\perp DE$ 于点 H，根据相似关系可知 $\frac{O_2H}{O_1F}=\frac{O_2D}{O_1D}$，

即 $\frac{r_2}{r_1}=\frac{h-2r_1-r_2}{h-r_1}$，解得 $r_2=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以球 O_2 的表面积为 $4\pi r_2^2=\frac{2\pi}{3}$. 故选 A.



12. C

思路导引 因为 $\triangle ACD$ 是以点 D 为直角顶点的直角三角形，所以 $\triangle ACD$ 的外接圆圆心是 AC 的中点，结合球的性质可知三棱锥外接球的球心与 AC 中点的连线垂直于平面 ACD，再利用余弦定理列出方程，根据折起过程中角的范围，求出外接球半径的范围，得出答案.

【解析】如图，设三棱锥 $B-ACD$ 的外接球球心为 O，取 AC 的中点 E，连接 EB，ED，OB，OD，OE，

因为 $\triangle ACD$ 是以点 D 为直角顶点的直角三角形，所以 $\triangle ACD$ 的外接圆圆心是点 E，

则由球的性质可知，$OE\perp$ 平面 ACD，

设四面体的外接球半径为 R，

因为 $\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，$\triangle ACD$ 是以点 D 为直角顶点的等腰直角三角形，

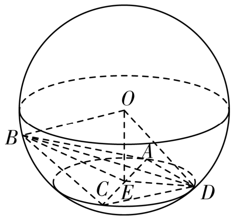
所以 $EB=\frac{3}{2}$，$ED=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中，由勾股定理可知 $OE=\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}$，

在 $\triangle BOE$ 中，利用余弦定理可得，

$\cos\angle OEB=\frac{OE^2+EB^2-OB^2}{2OE\cdot EB}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-\frac{3}{4}}}$，

因为$\angle OEB\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos\angle OEB\in(0,1]$，则$0<\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-\dfrac{3}{4}}}\leqslant 1$，解得$R\geqslant 1$，所以$R$的最小值为1，三棱锥外接球体积的最小值为$\dfrac{4\pi}{3}$. **故选 C.**



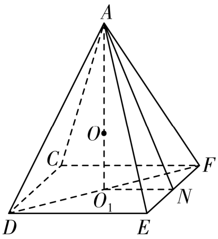
13. C 【解析】因为四边形$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ABC$是正三角形，则$OA=1$，$OB=\sqrt{3}$. 由题知，$PO\perp AC$，$PO\perp BD$. 设$PO=a$，则$PA=\sqrt{a^2+1}$，$PB=\sqrt{a^2+3}$. 在$\triangle PAB$中，由余弦定理可得$a^2+1=(a^2+3)+4-2\times 2\sqrt{a^2+3}\cos 60°$，解得$a=\sqrt{6}$，所以$PO=\sqrt{6}$，$PA=\sqrt{7}$，$PB=3$. 因为$O$为$BD$的中点，所以$PB=PD$. 又$BC=CD$，$PC=PC$，所以$\triangle PCB\cong\triangle PCD$. 同理可证$\triangle PCD\cong\triangle PAD$，$\triangle PAD\cong\triangle PAB$，所以$S_{\triangle PCB}=S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAD}=S_{\triangle PAB}$. 设四棱锥$P-ABCD$的内切球的半径为$r$，则$V_{四棱锥P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{菱形ABCD}\cdot PO=\dfrac{1}{3}(S_{菱形ABCD}+S_{\triangle PCB}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PAB})r$，所以$r=\dfrac{S_{菱形ABCD}\cdot PO}{S_{菱形ABCD}+4S_{\triangle PAB}}=\dfrac{2\times 2\sin 60°\times\sqrt{6}}{2\times 2\sin 60°+4\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\sin 60°\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，所以四棱锥$P-ABCD$的内切球的表面积$S=4\pi r^2=\dfrac{3\pi}{2}$，**故 C 正确.**

归纳总结 一个棱锥的内切球半径r可以根据球心到各个面的距离相等以及棱锥的体积公式$\left(V=\dfrac{1}{3}S_{棱锥表面积}\cdot r\right)$求得.

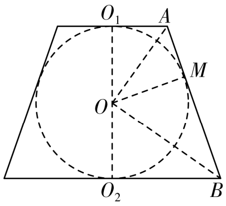
14. D 【解析】设球的半径为R，球心为O，四棱锥$A-CDEF$的高为h，由题可知

$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{500\pi}{3}$，解得 $R=5$. $V_{四棱锥A-CDEF}=\frac{1}{3}\times S_{正方形CDEF}\times h=\frac{32}{3}h$，所以要使四棱锥 $A-CDEF$ 的体积最大，只需使点 A 到底面 $CDEF$ 的距离最大. 根据四棱锥的结构特征可知，当四棱锥 $A-CDEF$ 为正四棱锥且球心 O 在四棱锥的内部时，该四棱锥的高最大，体积也最大.

设 N 是线段 EF 的中点，O_1 是正方形 $CDEF$ 的中心，连接 AO_1，O_1N，AN，DF. 设正方形 $CDEF$ 的边长为 a，则 $a^2=32$，解得 $a=4\sqrt{2}$，所以正方形 $CDEF$ 的外接圆半径 $r=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=4$，$NO_1=2\sqrt{2}$，球心 O 到底面 $CDEF$ 的距离 $OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 当四棱锥的体积最大时，四棱锥 $A-CDEF$ 为正四棱锥，四棱锥 $A-CDEF$ 的高 $AO_1=R+OO_1=5+3=8$，因为 $AO_1\perp O_1N$，所以 $AN=\sqrt{AO_1^2+NO_1^2}=\sqrt{8^2+(2\sqrt{2})^2}=6\sqrt{2}$，此时该四棱锥的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}+32=128$，**故 D 正确.**



15. 32π　**【解析】**连接 OA，OB，如图所示.



根据题意可知，$O_1A=AM=2$，$O_2B=BM=4$，

所以 $\angle O_1OA=\angle AOM$，$\angle O_2OB=\angle BOM$，

因为 $\angle O_1OA+\angle AOM+\angle O_2OB+\angle BOM=\pi$，

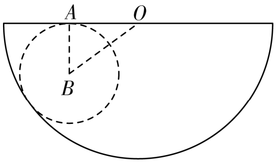
所以 $\angle AOM+\angle BOM=\frac{\pi}{2}$.

因为 $OM\perp AB$，所以 $\triangle OMA\backsim\triangle BMO$.

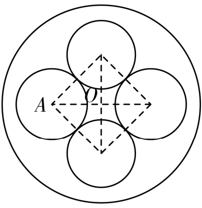
所以$\frac{OM}{AM}=\frac{BM}{OM}$，所以 $OM=\sqrt{AM\cdot BM}=2\sqrt{2}$，所以圆台的内切球半径为$2\sqrt{2}$，所以圆台的内切球的表面积 $S=4\pi\times OM^2=32\pi$.

16. $\frac{28\sqrt{6}}{3}$　【解析】设球心为 O，球 O 的半径为 R，棱台的高为 h，则 $h=\sqrt{6}$，$4\pi R^2=32\pi$，所以 $R=2\sqrt{2}$. 由题知，O 在下底面 $ABCD$ 上，底面 $ABCD$ 为正方形，易得正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}R=4$，面积为 16. 设上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的外接圆半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{2}$，易得正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为$\sqrt{2}r=2$，面积为 4，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times(16+4+\sqrt{16\times4})\times\sqrt{6}=\frac{28\sqrt{6}}{3}$.

17. B　【解析】一个弹珠可看作一个小球，作出其中一个小球和容器的正视图，如图①所示，作出四个小球和容器的俯视图，如图②所示.



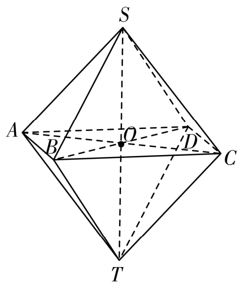
图①



图②

图①中小球球心 B，半球球心 O 与切点 A 构成直角三角形，则有 $OA^2+AB^2=OB^2$，图②中，四个小球球心的连线围成边长为 2 cm 的正方形. 设半球半径为 R，已知小球半径 $r=1$ cm，所以 $OA=\sqrt{2}$ cm，$AB=1$ cm，$OB=\sqrt{3}$ cm，$R=OB+r=\sqrt{3}+1$(cm). 所以半球形状的容器的容积是 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(\sqrt{3}+1)^3\pi=\frac{4(5+3\sqrt{3})\pi}{3}(\mathrm{cm}^3)$. **故 B 正确.**

18. BCD 【解析】对于 A，如图所示，由对称性可知棱切球球心 O 就是正八面体的中心，连接 ST，AC，BD 交于点 O，因为 $TA=TB=TC=TD=2$，所以 T 在平面 $ABCD$ 上的投影就是正方形 $ABCD$ 的中心，所以 $OT\perp$ 平面 $ABCD$，又 $OC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OC\perp OT$，又因为 $BO=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，所以 $OA=OB=OC=OD=OS=OT=\sqrt{2}$.



设点 O 到平面 CDT 的距离为 r，则有 $\frac{1}{3}OT\cdot\frac{1}{2}OC\cdot OD=V_{O-CDT}=\frac{1}{3}r\cdot S_{\triangle CDT}=\frac{1}{3}r\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{\sqrt{3}}{3}r$，

故 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$，**故 A 错误.**

对于 B，因为 $OC=OT=\sqrt{2}$，所以点 O 到直线 CT 的距离 $h=\frac{2S_{\triangle OCT}}{CT}=\frac{OC\cdot OT}{CT}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1$，**故 B 正确.**

对于 C，根据上面的分析，球 O 的半径 R 等于点 O 到直线 CT 的距离，即 $R=1$.

从而平面 CDT 截棱切球所得圆的半径 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，设这个圆为圆 P，球 O 的体积为 V，以 O 为顶点，圆 P 为底面的圆锥的体积为 V_1，

则棱切球在正八面体内部的体积大于 $8V_1$.

所以球 O 在正八面体外部的体积小于 $V-8V_1=\frac{4}{3}\pi R^3-8\times\frac{1}{3}\pi d^2 r=\frac{4}{3}\pi-8\times\frac{\sqrt{6}}{27}\pi=\left(\frac{4}{3}-\frac{8\sqrt{6}}{27}\right)\pi$，**故 C 正确.**

对于 D，球 O 在正八面体外部的表面积等于正八面体外八个球冠的表面积.

对于一个球冠而言,由其顶点和底面可以确定一个圆锥,且该圆锥的侧面积一定小于球冠的表面积,

即每个球冠的表面积都大于由该球冠顶点和底面圆确定的圆锥的侧面积.

由题可知由一个球冠确定的圆锥的底面半径 $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$,高 $H=R-r=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$,故母线长

$l=\sqrt{d^2+H^2}=\sqrt{2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}$.

所以每个球冠的表面积都大于该圆锥的侧面积 $\pi dl=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2-\frac{2\sqrt{6}}{3}}\pi=\frac{1}{3}\sqrt{6-2\sqrt{6}}\pi$.

所以八个球冠的表面积之和大于 $\frac{8}{3}\sqrt{6-2\sqrt{6}}\pi$,故 D 正确. 故选 BCD.

19. $4\sqrt{3}\pi$　7π　【解析】如图,设圆柱的底面半径为 r,高为 h,圆锥的高为 t,陀螺的外接球的半径为 R.

由题意可知,$4\pi R^2=16\pi$,$h=2$,

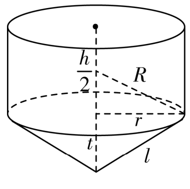
$\therefore R=2$,$\therefore r=\sqrt{R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 圆柱的侧面积 $S=2\pi r\times h=4\sqrt{3}\pi$.

圆柱的体积 $V_1=\pi r^2\times h=6\pi$,

圆锥的高 $t=R-\frac{h}{2}=2-1=1$,则圆锥的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi r^2\times t=\pi$,

$\therefore$ 该陀螺的体积 $V=V_1+V_2=7\pi$.

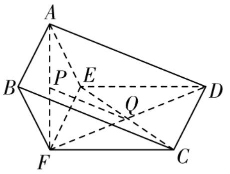


专题上分 6　翻折问题

1. C

攻略上分 利用大招攻略 32,把握好翻折前后变与不变的关系,再利用相关定理、性质求解即可.

【解析】翻折之后如图所示,



对于 A，因为 $AD=3AE$，$BC=3BF$，所以 $AB/\!/EF$ 且 $EF/\!/CD$，因此 $AB/\!/CD$，**故 A 成立**；

对于 B，连接 FD，因为 P，Q 分别为 FA，FD 的中点，所以 $PQ/\!/AD$，又因为 $EF\perp AE$，$EF\perp DE$，$AE\cap DE=E$，AE，$DE\subset$平面 AED，则 $EF\perp$平面 AED，因为 $AB/\!/EF$，所以 $AB\perp$平面 AED，又 $AD\subset$平面 AED，所以 $AB\perp AD$，所以 $AB\perp PQ$，**故 B 成立**；

对于 C，因为 $PQ/\!/AD$，$ED\cap AD=D$，所以 PQ 与 ED 不平行，**故 C 不成立**；

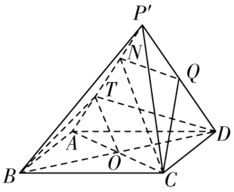
对于 D，因为 $PQ/\!/AD$，且 $PQ\not\subset$平面 ADE，$AD\subset$平面 ADE，所以 $PQ/\!/$平面 ADE，**故 D 成立**.

方法总结 在解决平面图形在翻折过程中位置关系的判断问题时，要注意翻折前后的线段长度与位置关系的“变”与“不变”. 与折痕垂直的线段，翻折前后垂直关系不变；与折痕平行的线段，翻折前后平行关系不变.

2. (1)【**证明**】因为 $\triangle P'AD$ 是正三角形，所以 $P'A=AD=AB=2$，在 $\triangle P'AB$ 中，$P'A^2+AB^2=8=P'B^2$，则 $AB\perp P'A$. 在正方形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$P'A\cap AD=A$，$P'A$，$AD\subset$平面 $P'AD$，所以 $AB\perp$平面 $P'AD$，而 $CD/\!/AB$，所以 $CD\perp$平面 $P'AD$.

(2)【**解**】存在点 Q 使得 $CQ/\!/$平面 BDT，且点 Q 为线段 $P'D$ 的中点. 证明如下：

分别取 $P'T$，$P'D$ 的中点 N，Q，连接 CQ，NQ，CN，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OT，如图.



易知 $NQ/\!/TD$，又 $TD\subset$平面 BDT，$NQ\not\subset$平面 BDT，所以 $NQ/\!/$平面 BDT. 依题意，

T 为 $P'A$ 上一点，且满足 $P'T=2AT$，则 T 为 NA 中点，又 O 为 AC 中点，即有 $TO//CN$. 又 $TO\subset$ 平面 BDT，$CN\not\subset$ 平面 BDT，所以 $CN//$平面 BDT. 又 $CN\cap NQ=N$，CN，$NQ\subset$ 平面 CQN，从而平面 $CQN//$平面 BDT. 又 $CQ\subset$ 平面 CQN，所以 $CQ//$平面 BDT. 所以当点 Q 为线段 $P'D$ 的中点时，$CQ//$平面 BDT.

3. B 【解析】因为 $\triangle AP_1P_2$ 为等腰直角三角形，C 为斜边 P_1P_2 的中点，$P_1P_2=4\sqrt{2}$，所以 $AP_1=AP_2=4$，

又 $AB=AD=x$，分别将 $\triangle CBP_1$，$\triangle CDP_2$ 沿着 CB，CD 翻折，点 P_1，P_2 能重合，

若两个三角形共面，当 P_1，P_2 与点 A 重合时 $x=2$，当 B，D 与点 A 重合时 $x=0$.

所以 $\triangle CBP_1$，$\triangle CDP_2$ 不共面时，x 的取值范围是 $0<x<2$. **故选** B.

4. B 【解析】$\because AO\perp BD$，$CO\perp BD$，

$\therefore$ 由二面角的定义知 $\angle AOC=\theta$，$90°\leqslant\theta\leqslant120°$，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 8，$\angle BAD=60°$，

$\therefore AO=CO=4\sqrt{3}$，

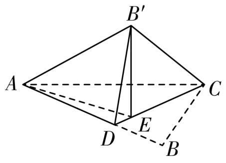
$\therefore$ 点 O 到 AC 的距离 $d=4\sqrt{3}\times\cos\left(\frac{1}{2}\angle AOC\right)$，

当 $\angle AOC=\theta=90°$时，d 取得最大值 $d_{\max}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$，

当 $\angle AOC=\theta=120°$ 时，d 取得最小值 $d_{\min}=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点 O 到直线 AC 的距离的取值范围为 $[2\sqrt{3},2\sqrt{6}]$. **故选** B.

5. B 【解析】过点 B' 作 $B'E\perp CD$ 于点 E，连接 AE，AB'，如图所示.



设 $\angle BCD=\angle B'CD=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $B'E=4\sin\alpha$，$CE=4\cos\alpha$，$\angle ACE=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

在$\triangle AEC$中，由余弦定理得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=9+16\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha$.

$\because$ 平面$B'CD\perp$平面ACD，平面$B'CD\cap$平面$ACD=CD$，$B'E\perp CD$，$B'E\subset$平面$B'CD$，

$\therefore B'E\perp$平面ACD.

又$AE\subset$平面ACD，$\therefore B'E\perp AE$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AEB'$中，由勾股定理得 $AB'^2=AE^2+B'E^2=9+16\cos^2\alpha-24\cos\alpha\sin\alpha+16\sin^2\alpha=25-12\sin 2\alpha$,

$\therefore$ 当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，AB'取得最小值$\sqrt{13}$.

故选 B.

名师点拨 对于翻折问题中与线段长度有关的计算，通常需要将这个线段放在某个三角形中进行处理，如果是有关长度最值的计算，一般考虑转化为函数或者利用不等式解决.

6. B 【解析】作出示意图如图所示，设点D在底面ABC的射影为M，且$M\in AB$，

所以$DM\perp$平面ABC，又$AC\subset$平面ABC，

所以$DM\perp AC$.

过点D作$DN\perp AC$于点N，连接NM，又$DM\cap DN=D$，DM，$DN\subset$平面DNM，

所以$AC\perp$平面DNM，又$NM\subset$平面DNM，所以$AC\perp NM$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5}$，又$\dfrac{1}{2}AC\times ND=\dfrac{1}{2}AD\times DC$，

所以$\sqrt{5}\times ND=1\times 2$，所以$ND=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$AN=\sqrt{AD^2-ND^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

又$NM=AN\tan\angle NAM=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ANM$中，可得$AM=\sqrt{AN^2+NM^2}=\dfrac{1}{2}$，

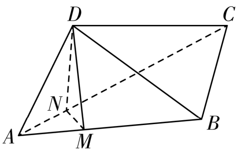
在$\mathrm{Rt}\triangle ADM$中，$DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

设点B到平面ACD的距离为d，

由 $V_{B-ACD}=V_{D-ACB}$ 可得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DM$,

所以$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选** B.



7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【**解析**】当 D'到平面 ABC 的距离最大,即 $D'O\perp$平面 ABC 时,三棱锥 $D'-ABC$ 的高最大,

由题意得,$\triangle ABD$ 为等边三角形,O 为 BD 中点,所以 $D'O=DO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB=1$,

所以三棱锥 $D'-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}D'O\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times2^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. (1)【**证明**】如图,取 AE 的中点 O,连接 PO,BO. 在直角梯形 $ABCD$ 中,

$\because DE=2,CD=3,\therefore CE=1$.

又$\because AB\perp BC,BC=\sqrt{3},AB/\!/CD,\therefore BE=\sqrt{CE^2+BC^2}=2$.

$\because DE/\!/AB,DE=AB=2,\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形.

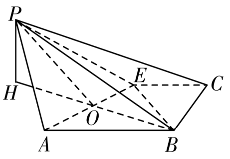
又$\because AB=BE=2,\therefore$ 四边形 $ABED$ 为菱形.

在四棱锥 $P-ABCE$ 中,连接 BE,由 $PA=PE=BA=BE=2$,得 $PO\perp AE,BO\perp AE$,

又$\because PO\cap BO=O,PO,BO\subset$平面 PBO,

$\therefore AE\perp$平面 PBO.

$\because PB\subset$平面 $PBO,\therefore PB\perp AE$.



(2)【**解**】过点 P 作 OB 的垂线,交 BO 的

延长线于点 H，如图.

$\because AE\perp$ 平面 PBO，$AE\subset$ 平面 ABE，$\therefore$ 平面 $ABE\perp$ 平面 PBO.

$\because$ 平面 $ABE\cap$ 平面 $PBO=BO$，$PH\perp OB$，$PH\subset$ 平面 PBO，$\therefore PH\perp$ 平面 ABE.

由(1)知在直角梯形 $ABCD$ 中，四边形 $ABED$ 是边长为 2 的菱形，则 $AD=2$.

$\because$ 在直角梯形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{3}$，$CE=1$，

$\therefore\ \angle BEC=\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABE$ 和 $\triangle PAE$ 都是正三角形，且 $OP=OB=\sqrt{3}$.

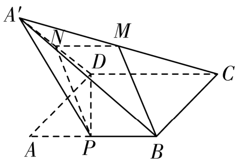
$\because PB=3$，$\therefore$ 在 $\triangle POB$ 中，$\cos\angle POB=\dfrac{OP^2+OB^2-PB^2}{2OP\cdot OB}=\dfrac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$.

$\because 0<\angle POB<\pi$，$\therefore\ \angle POB=\dfrac{2\pi}{3}$. 则在 Rt$\triangle PHO$ 中，$\angle POH=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore PH=\dfrac{3}{2}$.

$\because S_{梯形ABCE}=\dfrac{(CE+AB)\cdot BC}{2}=\dfrac{(1+2)\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore V_{四棱锥P-ABCE}=\dfrac{1}{3}\times S_{梯形ABCE}\times PH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

9. C 【解析】取 $A'D$ 的中点 N，连接 PN，MN. 如图所示.

则在 Rt$\triangle A'NP$ 中，$PN=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.



因为 M 是 $A'C$ 的中点，所以 $MN/\!/CD$，$MN=\dfrac{1}{2}CD$，

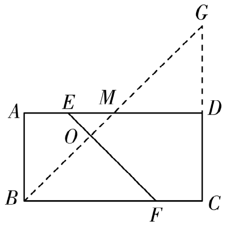
因为 $CD/\!/PB$，$AB=CD$，$PB=\dfrac{1}{2}AB$，

所以 $MN/\!/PB$ 且 $MN=PB$，所以四边形 $PBMN$ 为平行四边形，所以 $MB/\!/PN$，

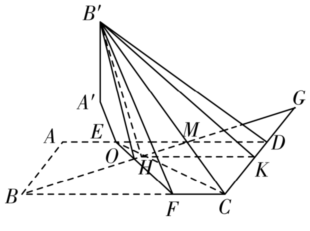
所以 $\angle A'PN$ 为异面直线 BM 与 PA' 所成的角(或其补角)，

在 Rt$\triangle A'NP$ 中，$\cos\angle A'PN=\dfrac{A'P}{PN}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，**故选** C.

10. B 【解析】如图①,在矩形 $ABCD$ 中,过点 B 作 EF 的垂线交 EF 于 O,交 AD 于 M,交 CD 的延长线于 G. 在翻折后图形中,如图②,设 B'在平面 ACD 内的射影为 H,则 H 在直线 BM 上,过 H 作 CD 的垂线,垂足为 K,连接 $B'K$,则 $\angle B'KH$ 为二面角 $B'-CD-E$ 的平面角. 由题得 $\angle B'OH=\alpha$,由题意知 $B'O=BO=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,$B'H=B'O\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$,则 $BH=BO+B'O\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1+\cos\alpha)$,由 $\angle GBC=45°$,$BG=4\sqrt{2}$,得 $HG=BG-BH=4\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1+\cos\alpha)$,所以 $HK=\dfrac{\sqrt{2}}{2}HG=4-\dfrac{3}{2}(1+\cos\alpha)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\cos\alpha$,所以 $\tan\angle B'KH=\dfrac{B'H}{HK}=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$. 令 $t=\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}(t>0)$,可得 $\sin\alpha+3t\cos\alpha=5t\leqslant\sqrt{1+9t^2}$,则 $0<t\leqslant\dfrac{1}{4}$,所以当 $t=\dfrac{1}{4}$,即 $\dfrac{\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}=\dfrac{1}{4}$,$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$时,$\tan\angle B'KH$ 取到最大值$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$,此时$\angle B'KH$ 最大,即二面角 $B'-CD-E$ 取得最大值. **故选 B.**



图①



图②

11. (1)【证明】由 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,可知 $BC/\!/EF$,

因为 $EF\subset$平面 PEF,$BC\not\subset$平面 PEF,所

以 $BC//$平面 PEF,

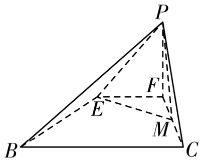
又 $BC\subset$平面 PBC,平面 $PEF\cap$平面 $PBC=m$,

所以 $m//BC$.

(2)【解】由题知 $PF=1,FC=2,PE=\frac{5}{3}$,

因为 $PF\perp PC$,所以 $PC=\sqrt{3}$,

过点 P 作 $PM\perp FC$ 于点 M,连接 EM,如图所示.



由 $S_{\triangle PFC}=\frac{1}{2}PC\cdot PF=\frac{1}{2}FC\cdot PM$,得

$PM=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $EF\perp PF$,$EF\perp FC$,PF,$FC\subset$平面 PFC,$PF\cap FC=F$,

所以 $EF\perp$平面 PFC,因为 $PM\subset$平面 PFC,所以 $EF\perp PM$,

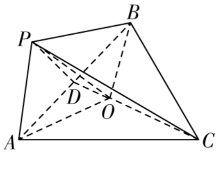
因为 $EF\cap FC=F$,EF,$FC\subset$平面 $BCFE$,

所以 $PM\perp$平面 $BCFE$,则 $\angle PEM$ 为直线 PE 与平面 $BCFE$ 所成的角,

在 Rt $\triangle PME$ 中,$\sin\angle PEM=\frac{PM}{PE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$,

所以直线 PE 与平面 $BCFE$ 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

12. B 【解析】已知 $PA=\frac{\sqrt{3}}{2},PB=\frac{3}{2},AB=\sqrt{3}$,即 $PA^2+PB^2=AB^2$,故 $\angle APB=90°$. 设等边三角形 ABC 的中心为 O,连接 OA,OB,OC,可得 $OA=OB=OC=\frac{\sqrt{3}}{2\sin 60°}=1$,延长 CO 交 AB 于点 D,则 D 为 AB 的中点,$OD\perp AB$,连接 PD,PO,如图所示.



因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$OD\subset$ 平面 ABC，$OD\perp AB$，所以 $OD\perp$ 平面 PAB. 又 $PD\subset$ 平面 PAB，所以 $PD\perp OD$. 易知 $PD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$OD=\frac{1}{2}$，所以 $PO=\sqrt{PD^2+OD^2}=1=OA$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心即为 $\triangle ABC$ 的中心 O，故三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}\times1^3=\frac{4\pi}{3}$，**故选 B.**

方法总结 确定几何体外接球球心的依据：(1)球心与截面圆圆心的连线与截面垂直，所以球心在过截面圆圆心且与截面垂直的直线上；(2)因为球心到几何体顶点的距离等于半径，所以球心与棱中点的连线与棱垂直，球心在几何体的棱的垂直平分线上.

13. 2

思路导引 根据题意，三棱锥 B_1-ACD 的体积最大时，平面 $AB_1C\perp$ 平面 ACD，取 AC 的中点 E，证得 $EB_1\perp$ 平面 ACD，再取 AD 的中点 O，证得 $EB_1\perp OE$，在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1OE$ 中，求得 $OB_1=2$，再在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，得到 $OA=OD=OC=2$，进而得到 O 为三棱锥 B_1-ACD 外接球的球心，即可求解.

【解析】如图所示，设点 B_1 到平面 ACD 的距离为 h，

因为 $V_{B_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot h$，且 $S_{\triangle ACD}$ 为定值，

所以当三棱锥 B_1-ACD 的体积最大时，只需 h 最大，此时平面 $AB_1C\perp$ 平面 ACD.

取 AC 的中点 E，连接 EB_1，因为 $AB_1=B_1C=2$ 且 $\angle AB_1C=90°$，

所以 $EB_1\perp AC$ 且 $EB_1=\sqrt{2}$，

因为平面 $AB_1C\cap$ 平面 $ACD=AC$，且 $EB_1\subset$ 平面 AB_1C，所以 $EB_1\perp$ 平面 ACD，

取 AD 的中点 O，连接 OE，OB_1，OC，因为 $OE\subset$ 平面 ACD，所以 $EB_1\perp OE$，

因为在梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=$

$90°, AB=BC=\frac{1}{2}AD=2$,

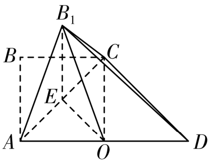
所以 $AC=CD=2\sqrt{2}$，则 $AD^2=AC^2+CD^2$，所以 $AC\perp CD, OE=\sqrt{2}$，

在 $Rt\triangle B_1OE$ 中，$OB_1=\sqrt{OE^2+B_1E^2}=2$，

在 $Rt\triangle ACD$ 中，根据直角三角形斜边上的中线性质，可得 $OA=OD=OC=\frac{1}{2}AD=2$，

所以 $OA=OD=OC=OB_1=2$，即 O 为三棱锥 B_1-ACD 外接球的球心，

设该外接球的半径为 R，则 $R=2$.



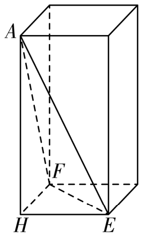
14. ACD　【解析】因为 $AH\perp HE, AH\perp HF$，$HE\cap HF=H, HE, HF\subset$ 平面 HEF，

所以 $AH\perp$ 平面 HEF，又 $EF\subset$ 平面 HEF，

所以 $AH\perp EF$，**故 A 正确**；

因为 AH, HE, HF 两两垂直，$AH=2, HE=HF=1$，

所以三棱锥 $H-AEF$ 的外接球即为其所在长方体的外接球，如图，



所以该外接球直径 $2R=\sqrt{1+1+2^2}=\sqrt{6}$，

则 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以三棱锥 $H-AEF$ 的外接球的体积为

$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$，**故 B 错误**；

因为 E, F, G 分别是 BC, CD, EF 的中点，

可得 $AE=AF, AG\perp EF, HG\perp EF$，

且 $AG=\frac{3\sqrt{2}}{2}, HG=\frac{\sqrt{2}}{2}, EF=\sqrt{2}, S_{\triangle HEF}=\frac{1}{2}HE\cdot HF=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}, S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot AG=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$，

设点 H 到平面 AEF 的距离为 d，由

$V_{H-AEF}=V_{A-HEF}$，得$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2$，解得 $d=\frac{2}{3}$，即点 H 到平面 AEF 的距离为 $\frac{2}{3}$，**故 C 正确；**

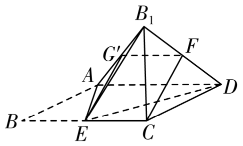
因为 $AG\perp EF$，$HG\perp EF$，所以$\angle AGH$ 即为二面角 $A-EF-H$ 的平面角，

在 $Rt\triangle AHG$ 中，由 $AG=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$HG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\cos\angle AGH=\frac{HG}{AG}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{3}$，**故 D 正确. 故选 ACD.**

15. C 【解析】对于①，由 $AB=2$，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 为边 BC 的中点，得$\angle B=\frac{\pi}{3}$ 且 $BE=1$，易知 $AE\perp EC$，$AE\perp B_1E$，又 $EC\cap B_1E=E$，EC，$B_1E\subset$平面 B_1EC，故 $AE\perp$平面 B_1EC. 又 $AE\subset$平面 AB_1E，所以平面 $AB_1E\perp$平面 B_1EC，**故①正确.**

对于②，设 G' 是 AB_1 的中点，连接 $G'E$，$G'F$，又 F 为 B_1D 的中点，则 $G'F/\!/AD$ 且 $G'F=\frac{1}{2}AD$.



又 $EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$ 且 $EC/\!/AD$，所以 $G'F/\!/EC$ 且 $G'F=EC$，即四边形 $FG'EC$ 为平行四边形，

故 $CF/\!/EG'$，所以 AB_1 与 CF 的夹角为$\angle AG'E$ 或其补角. 若 G' 为 AB_1 的中点，由①分析易知$\angle AG'E=\frac{2\pi}{3}$，故 AB_1 与 CF 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，**故②正确.**

对于③，由以上分析知，翻折过程中，当 $B_1E\perp$平面 $ABCD$ 时，V_{B_1-AED} 最大，此时 $V_{B_1-AED}=\frac{1}{3}\cdot B_1E\cdot S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故③错误.**

对于④，由②分析知：$EG'=CF$ 且 $EG'/\!/CF$，故 F 的轨迹长度与 G' 的轨迹长度相同，由①知 B_1 的轨迹为以 E 为圆心，B_1E 为半径的半圆，故 G' 的轨迹为以 AE 中点为圆心，$\frac{BE}{2}$ 为半径的半圆，所以 F 的轨迹长度为 $\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{BE}{2}=\frac{\pi}{2}$，**故④正确. 故选 C.**

16. ABD 【解析】在△ABC 中，由余弦定理可得 $AB^2=CB^2+CA^2-2\cdot CB\cdot CA\cdot\cos C=4+12-2\times2\times2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=4$，所以 $AB=2$.

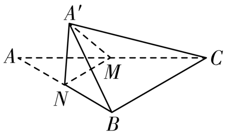
所以△ABC 是等腰三角形，腰长为 2，$\angle A=\angle C=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{2\pi}{3}$.

如图①所示，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，N 为 AB 中点，

又 M 为 AC 中点，所以 $MN/\!/BC$，

因为 $BC\not\subset$ 平面 $A'MN$，$MN\subset$ 平面 $A'MN$，

所以 $BC/\!/$平面 $A'MN$. **故 A 正确.**

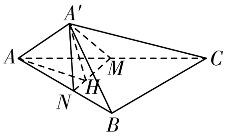


图①

如图②所示，过点 A 作 $AH\perp MN$，垂足为 H，连接 $A'H$，根据翻折的性质可知 $A'H\perp MN$，

又 $AH,A'H\subset$ 平面 $AA'H$，$AH\cap A'H=H$，所以 $MN\perp$ 平面 $AA'H$.

又 $AA'\subset$ 平面 $AA'H$，所以 $MN\perp AA'$. **故 B 正确.**



图②

当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$AN=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$. 在△$AMN$ 中，由余弦定理可得 $MN^2=AM^2+AN^2-2\cdot AM\cdot AN\cdot\cos\angle NAM=3+\frac{9}{4}-2\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$，

因为 $AN^2+MN^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3=AM^2$，所以 $\triangle AMN$ 为直角三角形，

所以线段 AM 所扫过的曲面是圆锥侧面的一部分.

在 $\triangle ANA'$ 中，$NA=NA'=\frac{3}{2}$，$AA'=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理可得 $\cos\angle ANA'=\frac{NA^2+NA'^2-AA'^2}{2\cdot NA\cdot NA'}=\frac{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-\frac{27}{4}}{2\times\frac{9}{4}}=-\frac{1}{2}$，又因为 $\angle ANA'\in(0,\pi)$，所以 $\angle ANA'=\frac{2\pi}{3}$.

所以线段 AM 扫过的曲面面积为 $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot NA\cdot MA=\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，**故 C 错误.**

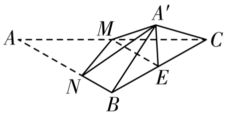
如图③所示，因为点 A' 在平面 ABC 的射影恰好落在线段 BC 上，设为点 E，则 $A'E\perp$ 平面 ABC.

设 $A'M$ 与平面 ABC 所成的角为 $\angle A'ME$，记为 θ，则 $\sin\theta=\frac{A'E}{A'M}=\frac{A'E}{\sqrt{3}}$.

而当 $ME\perp BC$ 时，ME 有最小值，为 $\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $A'E=\sqrt{A'M^2-ME^2}\leqslant\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$，

所以 $\sin\theta\leqslant\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故 D 正确. 故选 ABD.**



图③

专题上分 7　动态轨迹问题

1. D

思路导引　取 AB 的中点 M，连接 CM 并延长交 DA 的延长线于 N，由条件得 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC，$NA_1/\!/AD_1$，所以 $NA_1\perp$ 平面 A_1DC，从而可证得平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1DC，结合题意可得 $Q\in MC$，即可得解.

【解析】如图,取 AB 的中点 M,连接 CM 并延长交 DA 的延长线于 N,

由 $BC//AD$,可得 $\frac{BC}{AN}=\frac{BM}{AM}=1$,所以 $AN=BC=AD$,所以 A 为 ND 的中点.

连接 AD_1,A_1M,A_1N,由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 可得 $AD_1\perp A_1D$,

又 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1,$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $CD\perp AD_1$,

又 $A_1D\cap CD=D$,A_1D,$CD\subset$ 平面 A_1DC,

所以 $AD_1\perp$ 平面 A_1DC.

因为 $A_1D_1//AD$,$A_1D_1=AN$,所以四边形 NAD_1A_1 是平行四边形,

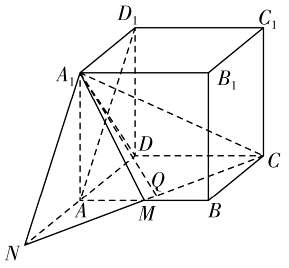
所以 $NA_1//AD_1$,所以 $NA_1\perp$ 平面 A_1DC,

因为 $NA_1\subset$ 平面 A_1MC,所以平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1DC.

又因为 Q 为底面 $ABCD$(含边界)上的动点,满足平面 $A_1QC\perp$ 平面 A_1DC,

所以 $Q\in MC$,即点 Q 的轨迹是线段 MC,

故选 D.



2. D 【解析】分别取线段 CD,C_1D_1,B_1C_1 的中点 E,F,G,连接 EF,EP,FG,GP,如图所示.

易知 $EF//CC_1$,$PG//CC_1$,所以 $EF//PG$,所以 E,F,G,P 四点共面,

又因为 $BB_1//PG$,$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$PG\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,

所以 $PG//$平面 BB_1D_1D,

又因为 $D_1B_1//FG$,$D_1B_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,$FG\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,

所以 $FG//$平面 BB_1D_1D,

又因为 $FG\cap PG=G$,FG,$PG\subset$ 平面 $EFGP$,

所以平面 $EFGP//$平面 BB_1D_1D.

因为 Q 为四边形 CC_1D_1D 及其内部的动点,所以当 $Q\in EF$,即 $PQ\subset$ 平面 $EFGP$

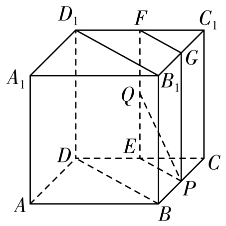
时,有 $PQ//$平面 BB_1D_1D,

由正方体的性质可知 $QE\perp$平面 $ABCD$,

所以 PQ 与平面 $ABCD$ 所成角即为$\angle QPE$,

又因为 $\tan\angle QPE=\frac{QE}{PE}$,设正方体的棱长为2,则 $\tan\angle QPE=\frac{QE}{\sqrt{2}}$,

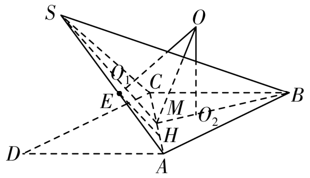
此时 $QE\in[0,2]$,所以 $\tan\angle QPE=\frac{QE}{\sqrt{2}}\in[0,\sqrt{2}]$,**故选 D.**



3. $\frac{25\pi}{3}$

思路导引 取 AC 中点 M,连接 BM,SM,作 $EH\perp AC$ 于 H,设点 F 轨迹所在平面为 α,则平面 α 经过点 H 且 $AC\perp\alpha$,设三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心为 O,$\triangle SAC$,$\triangle BAC$ 的中心分别为 O_1,O_2,连接 OO_1,OO_2,OM,则 $OO_1\perp$平面 SAC,$OO_2\perp$平面 BAC,且 O,O_1,O_2,M 四点共面,求出三棱锥 $S-ABC$ 的外接球半径及截面圆半径后可得结论.

【解析】取 AC 中点 M,连接 BM,SM,如图所示.



则 $AC\perp BM$,$AC\perp SM$,$BM\cap SM=M$,BM,$SM\subset$平面 SMB,

所以 $AC\perp$平面 SMB,

由题意 $SM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$,又 $SB=6$,

所以由余弦定理得,$\cos\angle SMB=\frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-6^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$,

因为$\angle SMB$是三角形内角，

所以$\angle SMB=120°$.

作$EH\perp AC$于点H，设点F轨迹所在平面为α，则平面α经过点H且$AC\perp\alpha$，

设三棱锥$S-ABC$外接球的球心为O，$\triangle SAC$，$\triangle BAC$的中心分别为O_1，O_2，连接OO_1，OO_2，OM，如图，

易知$OO_1\perp$平面SAC，$OO_2\perp$平面BAC，

且O，O_1，O_2，M四点共面，

易知$\triangle SAC\cong\triangle BAC$，由球的性质知$OO_1=OO_2$，从而$O_1M=O_2M$，即$OM$是$\angle O_1MO_2$的角平分线，

所以$\angle OMO_1=\dfrac{1}{2}\angle O_1MO_2=60°$，$O_1M=\dfrac{1}{3}SM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$OO_1=\sqrt{3}O_1M=2$，

又$O_1S=\dfrac{2}{3}SM=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

则三棱锥$S-ABC$外接球半径$r=\sqrt{OO_1^2+O_1S^2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，

易知O到平面α的距离$d=MH=1$，

故平面α截外接球所得截面圆的半径$r_1=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{28}{3}-1}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$，

所以截面圆的面积为$\dfrac{25\pi}{3}$，即点F轨迹所形成图形的面积为$\dfrac{25\pi}{3}$.

方法总结 有关线线垂直的动点轨迹问题往往转化为线面垂直问题，动点的轨迹一般情况下位于与题干中所给定直线垂直的平面上.

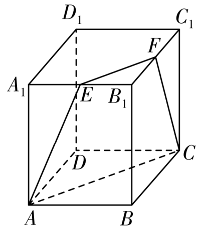
4. A 【解析】由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AE}$知，点$P$的轨迹在平面$ACE$与长方体表面的交线所围成的图形上，

如图所示，取B_1C_1的中点F，连接EF，CF，易知$EF// AC$，

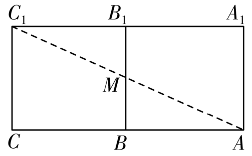
又$AE=CF=\sqrt{34}$，所以四边形$EFCA$为等腰梯形，

易知$AC=2EF=4\sqrt{2}$，由此可算出其高$h=4\sqrt{2}$，

所以等腰梯形 $EFCA$ 的面积为 $\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times4\sqrt{2}=24$. **故选 A.**



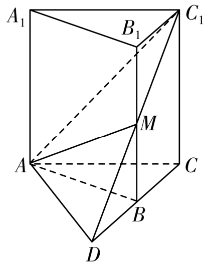
5. C 【解析】作出侧面 ABB_1A_1,BCC_1B_1 的展开图如图①所示,连接 AC_1,当 M 为 BB_1 的中点时,$AM+MC_1$ 最小,即截面 AMC_1 的周长最小.



图①

如图②所示,延长 C_1M,CB 交于点 D,平面 AMC_1 与平面 ABC 的交线为 AD,

当 M 为 BB_1 的中点时,$AB=BC=B_1C_1=BD=2$,在△ACD 中,由余弦定理得 $AD^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$,因为 $AD^2+AC^2=CD^2$,所以 $AD\perp AC$,



图②

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$AD\subset$ 平面 ABC,所以 $AA_1\perp AD$,$AA_1\cap AC=A$,AA_1,$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1,

所以 $AD\perp$ 平面 ACC_1A_1,又 $AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $AD\perp AC_1$,

故 $\angle CAC_1$ 即为平面 AMC_1 与平面 ABC 所成角的平面角,因为 $AC=CC_1=2$,$\angle C_1CA=90°$,所以 $\angle CAC_1=45°$. **故选 C.**

6. B 【解析】连接 AE,AF,分别交 A_1G,A_1H 于点 P,Q,连接 PQ.

因为点 M 在线段 EF 上运动,故 AM 在平面 AEF 内,

又因为 AM 与平面 A_1GH 交于点 N,

故点 N 的轨迹在平面 AEF 与平面 A_1GH 的交线上,即线段 PQ.

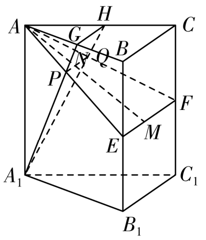
因为 G,H,F 分别为棱 AB,AC,CC_1 的中点,所以易知 $\triangle AA_1G\cong\triangle AA_1H\cong\triangle ACF$,

所以 $A_1G=A_1H=AF=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\angle FAC=\angle AA_1H$,

因为 $\angle AA_1H+\angle AHA_1=90°$,所以 $\angle FAC+\angle AHA_1=90°$,即 $A_1H\perp AF$,

所以 $\frac{1}{2}\cdot A_1H\cdot AQ=\frac{1}{2}\cdot AH\cdot AA_1$,解得 $AQ=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $AQ=\frac{2}{5}AF$,

同理,$AP=\frac{2}{5}AE$,故 $PQ/\!/EF$,且 $PQ=\frac{2}{5}EF=\frac{2}{5}$,**故选 B.**

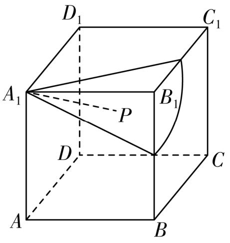


7. B

思路导引 根据直线 A_1P 与 DC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,得直线 A_1P 与直线 A_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,动点 P 的轨迹所围成的图形是圆锥侧面的四分之一,根据圆锥的侧面积公式求解即可.

【解析】如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$DC/\!/A_1B_1$,直线 A_1P 与 DC 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,即直线 A_1P 与直线 A_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{6}$,故动点 P 的轨迹所围成的图形是高为$\sqrt{3}$,底面半径为 1,母线长为 2 的圆锥侧面的四分之一.

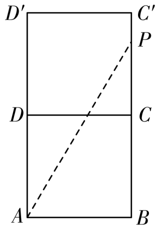
故动点 P 的轨迹所围成的图形的面积为 $\frac{1}{4}\times\pi\times1\times2=\frac{\pi}{2}$,**故选 B.**



8. BCD

攻略上分 根据正方体展开后的平面图可判断 A；过点 P 作平面 PGF//平面 ACB'，即可判断 B；根据点 M 的轨迹是圆弧，即可判断 C；利用大招攻略 25 中的延长线法作出正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被平面 $AD'P$ 所截的截面即可判断 D.

【解析】将正方体的底面和侧面展开可得如图①所示的平面图，连接 AP，则 $AP=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}<\sqrt{73}$，**故 A 错误.**



图①

如图②所示，连接 AC，BD，BD'，AB'，DC'，$B'C$，∵ $DD'\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $DD'\perp AC$，

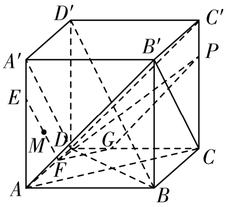
又 $AC\perp BD$，$DD'\cap BD=D$，DD'，$BD\subset$ 平面 $DD'B$，∴ $AC\perp$ 平面 $DD'B$，∵ $BD'\subset$ 平面 $DD'B$，∴ $AC\perp BD'$，

同理可得 $BD'\perp AB'$，又 $AC\cap AB'=A$，AC，$AB'\subset$ 平面 ACB'，∴ $BD'\perp$ 平面 ACB'.

过点 P 作 PG//$C'D$ 交 CD 于点 G，过点 G 作 GF//AC 交 AD 于点 F，连接 PF，

由 AB'//$C'D$ 可得 PG//AB'，又 $PG\not\subset$ 平面 ACB'，$AB'\subset$ 平面 ACB'，∴ PG//平面 ACB'，同理可得 GF//平面 ACB'，∵ $PG\cap GF=G$，PG，$GF\subset$ 平面 PGF，则平面 PGF//平面 ACB'.

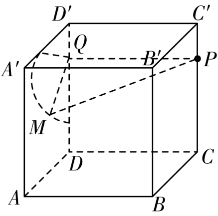
连接 $A'D$，设平面 PEF 交平面 $ADD'A'$ 于 EF，则 M 的运动轨迹为线段 EF，由点 P 在棱 CC' 上，且 $PC'=1$，可得 $DG=DF=1$，EF//$B'C$，∴ $EF=\frac{3}{4}A'D=3\sqrt{2}$，**故 B 正确.**



图②

如图③所示，连接 PM，若 $PM=2\sqrt{5}$，则 M 在以 P 为球心，$2\sqrt{5}$ 为半径的球面上，过点 P 作 $PQ\perp$ 平面 $ADD'A'$，连接 QM，则 $D'Q=1$，此时 $QM=\sqrt{PM^2-PQ^2}=2$.

$\therefore$ 点 M 在以 Q 为圆心，2 为半径的圆弧上运动，此时圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$. $\therefore$ 点 M 的运动轨迹长度为 $\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{4\pi}{3}$，**故 C 正确.**



图③

如图④所示，延长 DC，$D'P$ 交于点 H，连接 AH 交 BC 于点 I，连接 PI，AP，AD'，

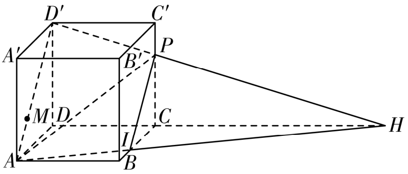
$\therefore$ 正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 被平面 $AD'P$ 截得的截面为四边形 $AIPD'$.

$\because$ $\triangle PCH\backsim\triangle D'DH$，$\therefore$ $\frac{PH}{D'H}=\frac{PC}{DD'}=\frac{HC}{DH}=\frac{3}{4}$，

$\because$ $\triangle ICH\backsim\triangle ADH$，$\therefore$ $\frac{CI}{DA}=\frac{HC}{DH}=\frac{IH}{AH}=\frac{3}{4}$，

$\therefore$ $\frac{PH}{D'H}=\frac{IH}{AH}=\frac{PI}{AD'}=\frac{3}{4}$，$\therefore$ $PI/\!/AD'$，且 $PI\neq AD'$，$\therefore$ 四边形 $AIPD'$ 为梯形，

$AI=PD'=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$，$\therefore$ 四边形 $AIPD'$ 为等腰梯形，**故 D 正确. 故选 BCD.**

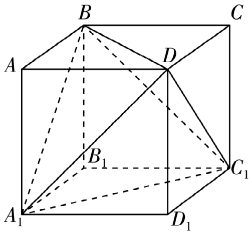


图④

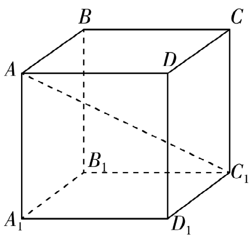
真题上分

1. ABD 【解析】对于 A 选项，正方体内切球的直径为 1 m，**故 A 符合题意**；

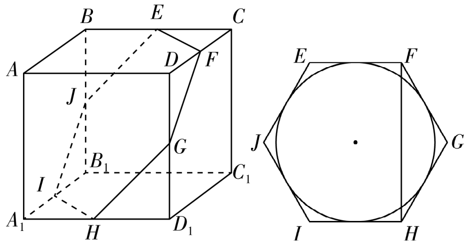
对于 B 选项，如图，正方体内部最大的正四面体棱长为 $BA_1=\sqrt{2}$ m，$\sqrt{2}$ m>1.4 m，**故 B 符合题意**；



对于 C 选项，圆柱底面直径为 0.01 m，可忽略不计，高为 1.8 m，圆柱可看作长度为 1.8 m 的线段. 如图，正方体的体对角线为 $AC_1=\sqrt{3}$ m<1.8 m，**故 C 不符合题意；**

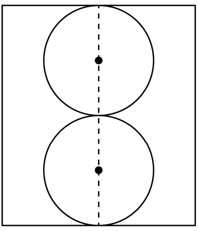


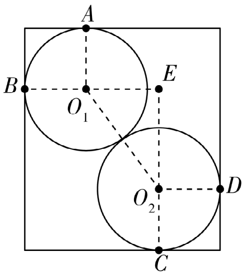
对于 D 选项，圆柱高为 0.01 m，可忽略不计，底面直径为 1.2 m，圆柱可看作直径为 1.2 m 的圆. 如图，E,F,G,H,I,J 为各棱的中点，六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形，其边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m，其内切圆直径 $FH=\sqrt{3}FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m，$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}>(1.2)^2=1.44$，**故 D 符合题意.**



2. $\frac{5}{2}$ 【解析】设铁球的半径为 $R(0<R<4)$，情形一：两个铁球的球心都在圆柱的轴上，且两球分别与圆柱的上、下底面相切，其轴截面如图①，则 $4R=9$，则 $R=\frac{9}{4}$；情形二：两球均分别与圆柱的一个底面和侧面相切，其轴截面如图②，则 $\begin{cases}O_1E+2R=8,\\O_2E+2R=9,\\O_1E^2+O_2E^2=O_1O_2^2=4R^2,\end{cases}$ 解得 $R=\frac{5}{2}$ 或 $R=\frac{29}{2}$（舍去）.

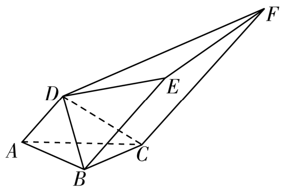
由于$\frac{9}{4}<\frac{5}{2}$，故 R 的最大值为$\frac{5}{2}$.


图①

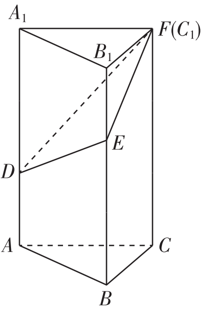

图②

3. B 【解析】设圆柱、圆锥的底面半径为 r，则圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{r^2+3}$. 又圆柱与圆锥的侧面积相等，所以 $2\pi r\cdot\sqrt{3}=\pi r\sqrt{r^2+3}$，解得 $r=3$，所以圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times3^2\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$，**故选 B.**

4. C 【解析】由已知可得，三条平行线中的任意一条到另外两条确定的平面的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 如图，连接 BD，CD，则五面体的体积 $V=V_{三棱锥C-ABD}+V_{四棱锥D-BCFE}$，其中 $V_{三棱锥C-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，$V_{四棱锥D-BCFE}=\frac{1}{3}S_{梯形BCFE}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+3)\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$，$\therefore V=V_{三棱锥C-ABD}+V_{四棱锥D-BCFE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 C.**



一题多解 如图，不妨将该五面体看作由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 截去四棱锥 $C_1-A_1B_1ED$ 得到的，此时的五面体 $ABC-DEF$ 仍满足题意.



结合题意可知，在五面体 $ABC-DEF$ 中，$AB=BC=AC=1$，$AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，且 $AD//BE//CF$.

$\therefore A_1D=2$，$B_1E=1$，

$\therefore V_{ABC-DEF}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{C_1-B_1EDA_1}$

$=S_{\triangle ABC}\cdot CF-\frac{1}{3}\cdot S_{梯形B_1EDA_1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

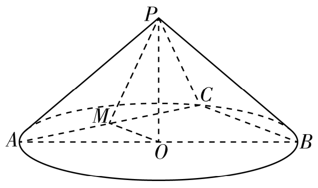
$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3-\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)\times1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故选 C.**

5. AC 【解析】对于 A，依题意，圆锥母线长 $l=PA=PB=2$，$PO=PA\cdot\cos 60°=1$，$AO=BO=PA\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$，所以底面圆的半径 $r=\sqrt{3}$，圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 1=\pi$，故 **A 正确**；

对于 B，该圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\cdot\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}\pi$，故 **B 错误**；

对于 C，如图，取 AC 的中点 M，连接 PM，OM，则 $OM\perp AC$，又因为 $PA=PC$，所以 $PM\perp AC$，故 $\angle PMO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角，即 $\angle PMO=45°$，所以 $\tan 45°=\frac{PO}{OM}=1$，即 $OM=1$，所以 $AC=2\sqrt{AO^2-OM^2}=2\times\sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$，故 **C 正确**；



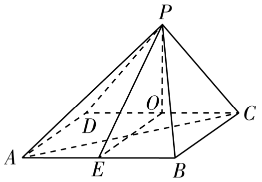
对于 D，由选项 C 可知，$AC=2\sqrt{2}$，$PM\perp AC$，$PM=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PAC$ 的面积为 $\frac{1}{2}PM\cdot AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2$，故 **D 错误**. 故选 **AC**.

6. C 【解析】如图，取 CD 的中点为 O，AB 的中点为 E，连接 PO，OE，PE，因为 $PC=PD$，所以 $PO\perp CD$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，CD 的中点为 O，AB 的中点为 E，所以 $OE\perp CD$，$AB/\!/CD$. 又 $PO\cap OE=O$，所以 $CD\perp$ 平面 POE. 因为 $PE\subset$ 平面 POE，所以 $CD\perp PE$，所以 $AB\perp PE$，所以 $PB=PA$. 在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3$，$\angle PCA=45°$，$AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，由余弦定理得，$PA^2=PC^2+AC^2-2PC\cdot AC\cdot\cos 45°=9+32-2\times3\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，则 $PA=PB=\sqrt{17}$.

在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，则 $\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PC\cdot BC\cdot\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times$

$3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$，故选 C.



7. A 【解析】由题意，得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为 $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{3}=3$，$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=4$. 设该正三棱台上、下底面的外接圆的圆心分别为 O_1，O_2，外接球的半径为 R，球心为 O，则 $O_1O_2=1$，球心 O 在直线 O_1O_2 上. 由于球心位置不能确定，需分球心在线段 O_1O_2 上和不在线段 O_1O_2 上两种情况讨论. 当球心在线段 O_1O_2 上时，$R^2=3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$，解得 $OO_1=4>1$，不符合题意；当球心不在线段 O_1O_2 上，即球心在线段 O_1O_2 的延长线上时，$R^2=4^2+OO_2^2=3^2+(1+OO_2)^2$，解得 $OO_2=3$，所以 $R^2=25$. 综上，球 O 的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$，故选 A.

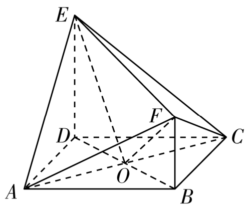
8. C 【解析】由题意知棱台的两底面面积分别为 $1.4\times10^8\ m^2$ 和 $1.8\times10^8\ m^2$，高为

提示：$1\ km^2=10^6\ m^2$

$157.5-148.5=9(m)$，所以棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(1.4\times10^8+1.8\times10^8+\sqrt{1.4\times10^8\times1.8\times10^8})\times9=3\times10^8\times(1.4+1.8+0.6\times\sqrt{7})\approx1.437\times10^9\approx1.4\times10^9(m^3)$，故选 C.

提示：台体的体积 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$，$S_1$，$S_2$ 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

9. CD 【解析】如图，连接 BD 交 AC 于 O，连接 OE，OF.



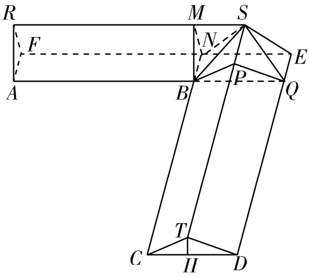
设 $AB=ED=2FB=2$，则 $AB=BC=CD=AD=2$. 由 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB/\!/ED$，得 $FB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V_1=V_{E-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot$

$ED=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot ED=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times2\times2=\frac{4}{3}$，$V_2=V_{F-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot FB=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot FB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{2}{3}$. $ED\perp$平面 $ABCD$，

关键：求棱锥体积的关键是确定高，常常结合直线与平面的位置关系确定

$AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $ED\perp AC$. 又 $AC\perp BD$，且 $ED\cap BD=D$，ED，$BD\subset$平面 $BDEF$，所以 $AC\perp$平面 $BDEF$. 又 $OF\subset$平面 $BDEF$，所以 $AC\perp OF$. 易知 $BD=2\sqrt{2}$，$OB=OD=\sqrt{2}$，$OF=\sqrt{OB^2+FB^2}=\sqrt{3}$，$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{BD^2+(ED-FB)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=3$，所以$EF^2=OE^2+OF^2$，所以 $OF\perp OE$，而 $OE\cap AC=O$，OE，$AC\subset$平面 ACE，所以 $OF\perp$平面 ACE. 又 $AC=AE=CE=2\sqrt{2}$，所以 $V_3=V_{F-ACE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot OF=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2\cdot OF=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}=2$，所以有 $V_3\neq 2V_2$，$V_3\neq V_1$，$V_3=V_1+V_2$，$2V_3=3V_1$，所以**选项 A，B 不正确，选项 C，D 正确，故选 CD.**

10. 60　【解析】如图，延长 AB 交 DE 于点 Q，作 $BP\,//\,CT$，交 ST 于点 P，连接 PQ，SQ，



延长 CB 交 EF 于点 N，连接 SN，作 $MN//RF$ 交 RS 于点 M，连接 BM. 由题中已知的线面关系可知，几何体 $ARF-BMN$ 与几何体 $CDT-BQP$ 均为直三棱柱，且 $V_{ARF-BMN}=V_{CDT-BQP}$，几何体 $S-BQEN$ 为正四棱锥，几何体 $S-MNB$ 为三棱锥，且 $SM\perp$平面 BMN，几何体 $S-BPQ$ 为三棱锥，且 $SP\perp$平面 BPQ.

在$\triangle CDT$ 中，过点 T 作 $TH\perp CD$ 于点 H，

由 $CT=DT=\frac{5}{2}$，$CD=4$，可得 $TH=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$，$\therefore S_{\triangle CDT}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3.$

$\because BC=8$，$\therefore V_{CDT-BQP}=3\times8=24.$

$\because$ 平面 $TCD\perp$ 平面 ABC，$TH\perp CD$，$TH\subset$ 平面 TCD，平面 $TCD\cap$ 平面 $ABC=CD$，

$\therefore TH\perp$ 平面 ABC，结合题中已知的线面位置关系可得 TH 为多面体的高.

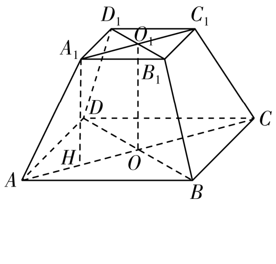
又几何体 $S-BQEN$ 的底面边长 $BQ=4$，则 $V_{S-BQEN}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times4^2=8$. 又 $S_{\triangle BMN}=S_{\triangle ARF}=S_{\triangle CDT}=S_{\triangle BPQ}=3$，$SM=SP=CH=2$，

$\therefore V_{S-MNB}=V_{S-BPQ}=\frac{1}{3}\times2\times3=2.$

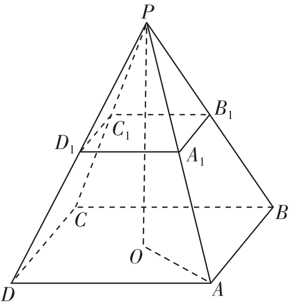
$\therefore$ 该多面体的体积 $V=V_{ARF-BMN}+V_{CDT-BQP}+V_{S-BQEN}+V_{S-MNB}+V_{S-BPQ}=2V_{CDT-BQP}+V_{S-BQEN}+2V_{S-MNB}=2\times24+8+2\times2=60.$

11. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　**【解析】**$\because$ 圆台甲、乙的上、下底面半径均相等，$\therefore \frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{h_{甲}}{h_{乙}}=\frac{\sqrt{[2(r_2-r_1)]^2-(r_2-r_1)^2}}{\sqrt{[3(r_2-r_1)]^2-(r_2-r_1)^2}}=\frac{\sqrt{3}(r_2-r_1)}{2\sqrt{2}(r_2-r_1)}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$

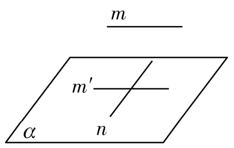
12. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$　**【解析】**如图，连接 AC，BD 交于点 O，连接 A_1C_1，B_1D_1 交于点 O_1，连接 OO_1，过点 A_1 作 $A_1H\perp AC$ 于点 H，则 OO_1 为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高. 在等腰梯形 A_1ACC_1 中，$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，$A_1C_1=\sqrt{2}A_1B_1=\sqrt{2}$，则 $AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $OO_1=A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times(1^2+2^2+\sqrt{1^2\times2^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}.$



一题多解 将正四棱台补形为正四棱锥 $P-ABCD$，如图，因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，所以 A_1，B_1，C_1，D_1 分别为 PA，PB，PC，PD 的中点. 又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以 $PA=PB=PC=PD=2\sqrt{2}$. 过 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，连接 OA，易知 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，又因为 $AB=2$，所以 $OA=\sqrt{2}$，所以 $PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=\sqrt{6}$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}PO\cdot S_{\text{正方形}ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times4=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，同理，四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.



13. C 【解析】

选项	分析	正误
A	m 与 n 也可能垂直，如图，$m/\!/m'$，$m'\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m'\perp n$，可知 $m\perp n$ 	×
B	垂直于同一条直线的两平面平行	×
C	$\because m/\!/\alpha$，$\therefore$ 存在直线 m' 使得 $m'\subset\alpha$，且 $m/\!/m'$，又 $m\perp\beta$，$\therefore m'\perp\beta$，$\therefore\alpha\perp\beta$	√
D	若 $\alpha\cap\beta=n$，则当 m 与 n 重合时，$m\subset\beta$	×

故选 C.

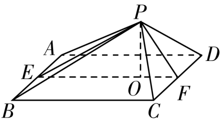
14. BD 【解析】对于 A，由正三棱柱的性质可知，$AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $AD\subset$ 平面 ABC，则 $AA_1\perp AD$，假设 $AD\perp A_1C$，又 $AA_1\cap A_1C=A_1$，AA_1，$A_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $AD\perp$ 平面 AA_1C_1C，矛盾，所以 AD 与 A_1C 不垂直，**故 A 错误**.

对于 B，$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore AA_1\perp BC$. 又 $AD\perp BC$，$AD\cap AA_1=A$，AD，$AA_1\subset$ 平面 AA_1D，$\therefore BC\perp$ 平面 AA_1D，又 $B_1C_1//BC$，$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 AA_1D，**故 B 正确**.

对于 C，$AB//A_1B_1$，AB，$A_1B_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AD\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AD\cap AB=A$，所以 AD 与 A_1B_1 异面，**故 C 错误**.

对于 D，$\because CC_1//AA_1$，$AA_1\subset$ 平面 AA_1D，$CC_1\not\subset$ 平面 AA_1D，$\therefore CC_1//$ 平面 AA_1D，**故 D 正确. 故选 BD.**

15. D 【解析】四棱锥的底面是边长为 4 的正方形，且



$PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，如图，设 AB，CD 的中点分别为 E，F，连接 EF，PE，PF，则 $PE\perp AB$，$PF\perp CD$. $\because EF\perp CD$，$PF\perp CD$，$EF\cap PF=F$，$EF\subset$ 平面 PEF，$PF\subset$ 平面 PEF，$\therefore CD\perp$ 平面 PEF. 又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF$. 过点 P 作 $PO\perp EF$ 于点 O，则 $PO\subset$ 平面 PEF，则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. 在 $\triangle PEF$ 中，由题可求得 $PE=2\sqrt{3}$，$PF=2$，$EF=4$，$\therefore PE^2+PF^2=EF^2$，$\therefore \angle EPF=90°$，根据面积相等可得 $PO\cdot EF=PE\cdot PF$，即 $4PO=2\sqrt{3}\times 2$，得 $PO=\sqrt{3}$. **故选 D.**

16. (1)【证明】$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB$，

又 $AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD.

又 $AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

一题多解 $\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

$\because$ 平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，

$\therefore AD\perp$ 平面 PAB，$\because AD\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

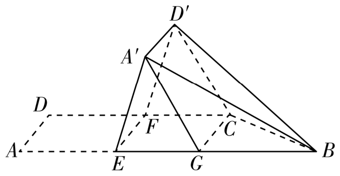
17. (1)【证明】如图，过 C 作 $CG/\!/EF$ 交 EB 于 G，连接 $A'G$. 因为 $EF/\!/AD$，$AB/\!/CD$，$\angle DAB=90°$，所以四边形 $ADFE$ 为矩形，四边形 $EFCG$ 为矩形，所以 $EF\perp\!\!\!\!\perp AD$，$EF\perp\!\!\!\!\perp CG$，所以 $CG\perp\!\!\!\!\perp AD$，所以 $CG\perp\!\!\!\!\perp A'D'$，所以四边形 $A'D'CG$ 为平行四边形.

所以 $CD'/\!/A'G$，又 $A'G\subset$ 平面 $A'BE$，$CD'\not\subset$ 平面 $A'BE$，所以 $CD'/\!/$ 平面 $A'BE$.

因为 $CF/\!/EB$，$EB\subset$ 平面 $A'BE$，$CF\not\subset$ 平面 $A'BE$，所以 $CF/\!/$ 平面 $A'BE$.

又 CD'，$CF\subset$ 平面 $CD'F$，$CD'\cap CF=C$，所以平面 $CD'F/\!/$ 平面 $A'BE$.

因为 $A'B\subset$ 平面 $A'BE$，所以 $A'B/\!/$ 平面 $CD'F$.



18. (1)【证明】由 $BC=2$，$AD=4$，点 M 为 AD 的中点得 $BC=DM$. 又 $BC/\!/MD$，所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形，则 $BM/\!/CD$.

又 $CD\subset$ 平面 CDE，$BM\not\subset$ 平面 CDE，所以 $BM/\!/$ 平面 CDE.

(2)【解】如图，连接 FM，因为 $EF/\!/AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$，M 是 AD 的中点，所以四边形 $EFMD$ 是平行四边形，所以 $FM\perp\!\!\!\!\perp ED$.

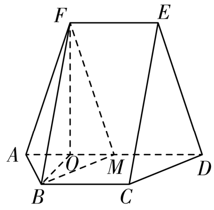
因为四边形 $ADEF$ 是等腰梯形，所以 $\triangle AMF$ 是等腰三角形.

同理，$\triangle AMB$ 也是等腰三角形.

取 AM 的中点 O，连接 OF，OB，则 $OF\perp AM$，$OB\perp AM$. 又 $OB\cap OF=O$，OB，$OF\subset$ 平面 BOF，所以 $AM\perp$ 平面 BOF.

又 $AD=4$，$ED=\sqrt{10}$，$AB=2$，所以 $OF=3$，$OB=\sqrt{3}$.

又 $FB=2\sqrt{3}$，所以 $OF^2+OB^2=FB^2$，故 $OF\perp OB$，所以 $S_{\triangle FOB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



在$\triangle ABF$中，因为$AB=2$，$AF=\sqrt{10}$，$FB=2\sqrt{3}$，所以由余弦定理得$\cos\angle ABF=\dfrac{AB^2+FB^2-AF^2}{2AB\cdot FB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以$\sin\angle ABF=\sqrt{1-\cos^2\angle ABF}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，

所以$S_{\triangle FAB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot FB\cdot\sin\angle ABF=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$.

设M到平面ABF的距离为h，则$V_{M-ABF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle FAB}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle FOB}\cdot AM$，解得$h=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$，故点$M$到平面$FAB$的距离为$\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

19. (1)【证明】$\because AD=5\sqrt{3}$，$AB=8$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore AE=2\sqrt{3}$，$AF=4$.

在$\triangle AEF$中，由余弦定理得$EF^2=AF^2+AE^2-2AF\cdot AE\cdot\cos A=16+12-2\times4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4$，则$EF=2$，

$\therefore$ 在$\triangle AEF$中，$EF^2+AE^2=AF^2$，

$\therefore EF\perp AE$.

又$\because$ $\triangle AEF$沿EF翻折至$\triangle PEF$，

$\therefore EF\perp PE$.

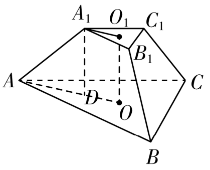
又$\because AE\cap PE=E$，$AE,PE\subset$平面PED，

$\therefore EF\perp$平面PED.

又$\because PD\subset$平面PED，

$\therefore EF\perp PD$.

20. B 【解析】设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的高为h. $\because AB=6$，$A_1B_1=2$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6\times6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=9\sqrt{3}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. $\because$ 正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V=\dfrac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}})h=\dfrac{1}{3}\times(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}})h=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}h=\dfrac{52}{3}$，$\therefore h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.



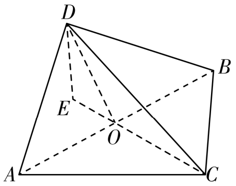
如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O，O_1，连接 A_1O_1，O_1O，AO，作 $A_1D\perp$平面 ABC 交平面 ABC 于点 D，由几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱台可知，点 D 在 AO 上，且四边形 A_1O_1OD 为矩形，其中$\angle A_1AD$ 即为直线 A_1A 与平面 ABC 所成的角. 由 $AB=6,A_1B_1=2$，可得 $OA=2\sqrt{3},O_1A_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

提示：边长为 a 的正三角形的中心到各顶点的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore AD=OA-OD=OA-O_1A_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \tan\angle A_1AD=\dfrac{A_1D}{AD}=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=1$. **故选** B.

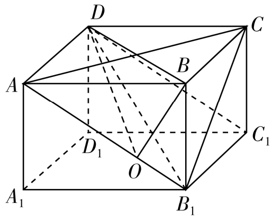
【解析】如图，设 AB 的中点为 O，连接 CO，DO，则 $CO\perp AB$，$DO\perp AB$，于是$\angle COD$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角.



过点 D 作 $DE\perp$平面 ABC，则点 E 一定落在 CO 的延长线上，$\angle DCE$ 即直线 CD 与平面 ABC 所成的角. 不妨设 $AB=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle EOD$ 中，$DO=\sqrt{3}$，$\angle EOD=180°-150°=30°$，则 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$EO=\dfrac{3}{2}$. 又 $CO=\dfrac{1}{2}AB=1$，所以 $EC=\dfrac{5}{2}$，$\tan\angle DCE=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ $\Big($**另解**：在$\triangle DOC$ 中，根据余弦定理得 $CD^2=DO^2+CO^2-2DO\cdot CO\cdot\cos 150°=3+1+3=7$. 所以 $\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，所以 $\tan\angle DCE=\dfrac{\sqrt{3}}{5}\Big)$，**故选** C.

22. D　**【解析】**在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AB=a,BC=b,CC_1=c$. 连接 BD，因为 $BB_1\perp$平面 $ABCD$，所以 B_1D 与平面

$ABCD$ 所成的角为 $\angle BDB_1$，即 $\angle BDB_1=30°$，所以 $\tan\angle BDB_1=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ①



因为 $DA\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $\angle AB_1D$，即 $\angle AB_1D=30°$，所以 $\tan\angle AB_1D=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}$. ②

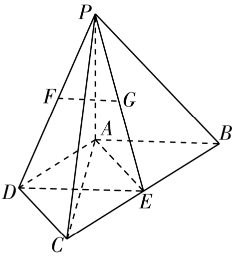
由①②可得 $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$，**故 A 不正确.**

过点 B 作线段 AB_1 的垂线，垂足为 O，连接 DO，由 A 可知 $BB_1=c$，$AB=\sqrt{2}c$，$AB_1=\sqrt{3}c$，则 $BO=\frac{\sqrt{6}}{3}c$，$B_1O=\frac{\sqrt{3}}{3}c$，$AO=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$，又 $AD=c$，则 $DO=\frac{\sqrt{21}}{3}c$，所以 $DO^2+BO^2=BD^2$，所以 $BO\perp DO$.

又因为 $DO\cap AB_1=O$，DO，$AB_1\subset$ 平面 AB_1D，所以 $BO\perp$ 平面 AB_1D，即 $BO\perp$ 平面 AB_1C_1D，所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $\angle OAB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\sin\angle OAB=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}c}{\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，**故 B 不正确.** 因为 $AC=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}c$，$CB_1=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，**故 C 不正确.** 易知 B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle DB_1C$，而 $DC=B_1C=\sqrt{2}c$，且 $DC\perp B_1C$，所以 $\angle DB_1C=45°$，**故 D 正确. 故选 D.**

快解 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle BDB_1$，B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\angle AB_1D$，则 $\angle BDB_1=\angle AB_1D=30°$. 设 $B_1D=2$，则 $AD=BB_1=1$，则 $AB_1=\sqrt{3}$，从而 $AB=\sqrt{2}$，则 $AB=\sqrt{2}AD$，AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $\angle B_1AB$，其正弦值为 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AC=\sqrt{3}>\sqrt{2}=CB_1$，$B_1D$ 与平面 BB_1C_1C 所成的角 $\angle DB_1C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **故 A，B，C 错误，D 正确. 故选 D.**

23. (1)【证明】连接 DE,AE,如图.



$\because$ F,G 分别为线段 PD,PE 的中点,

$\therefore$ $FG/\!/DE$.

$\because$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 均为等腰直角三角形,$\angle BAC=90°$,$\angle ADC=90°$,$\therefore$ $AD=DC=CE=AE$ 且 $\angle AEC=90°$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 为正方形,$\therefore$ $DE\perp AC$,又 $AB\perp AC$,

又 DE,AB,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore$ $DE/\!/AB$.

$\therefore$ $FG/\!/AB$,

又 $FG\not\subset$ 平面 PAB,$AB\subset$ 平面 PAB,

$\therefore$ $FG/\!/$平面 PAB.

(2)【解】由(1)知,$DE/\!/AB$,$\therefore$ 直线 AB 与平面 PCD 所成的角即为直线 DE 与平面 PCD 所成的角.

$\because$ $PA=AC$,不妨设 $DC=AD=a$,则 $DE=\sqrt{2}a$,$AC=PA=\sqrt{2}a$,

$\therefore$ $S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}a^2$.

$\therefore$ $V_{P-DCE}=\dfrac{1}{3}\cdot AP\cdot S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}a\times\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

$\because$ $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{3}a$,$DC=a$,$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2a$,

$\therefore$ $PD^2+DC^2=PC^2$,$\therefore$ $PD\perp DC$,

$\therefore$ $S_{\triangle PDC}=\dfrac{1}{2}\cdot PD\cdot DC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

设点 E 到平面 PCD 的距离为 h,

则 $h=\dfrac{3V_{P-DCE}}{S_{\triangle PDC}}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

设直线 DE 与平面 PCD 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=\dfrac{h}{DE}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{3}a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

24. (1)【证明】由题可知 $A_1B_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，$EF\parallel A_1B_1$，所以 $EF\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又因为 $GF\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $GF\perp EF$.

在 $Rt\triangle GC_1F$ 中，$GC_1=\frac{1}{4}CC_1=1$，$FC_1=\frac{1}{2}B_1C_1=2$，

所以 $FG=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

在 $Rt\triangle BB_1F$ 中，$BB_1=4$，$B_1F=\frac{1}{2}B_1C_1=2$，所以 $BF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

在 $Rt\triangle BCG$ 中，$BC=4$，$CG=\frac{3}{4}CC_1=3$，

所以 $BG=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

则 $BG^2=FG^2+BF^2=25$，所以 $BF\perp GF$.

关键：要善于利用题目中的数据"算垂直"，即由"定量"到"定性"

因为 $GF\perp EF$，$GF\perp BF$，且 $BF\cap EF=F$，

提示：必须强调 $BF\cap EF=F$，紧扣判定定理

BF，$EF\subset$ 平面 EBF，所以 $GF\perp$ 平面 EBF.

(2)【解】过点 F 作 $FH\perp BE$ 于点 H，连接 HG，如图所示.

因为 $FG\perp$平面 EBF，$BE\subset$平面 EBF，所以 $FG\perp BE$，

又 $FG\cap FH=F$，FG，$FH\subset$平面 FGH，所以 $BE\perp$平面 FGH.

又 $HG\subset$平面 FGH，所以 $BE\perp HG$.

所以 $\angle FHG$ 即为平面 EBF 与平面 EBG 的夹角.

因为 $EF\perp$ 平面 BCC_1B_1，$BF\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $EF\perp BF$，

在 $Rt\triangle BFE$ 中，$EF=4$，$BF=2\sqrt{5}$，则 $BE=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，

所以 $FH=\frac{EF\cdot BF}{BE}=\frac{8\sqrt{5}}{6}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

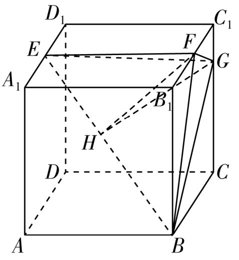
因为 $FG\perp$平面 EBF，$HF\subset$平面 EBF，所以 $FG\perp HF$，

在 $Rt\triangle GFH$ 中，$GF=\sqrt{5}$，$FH=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\tan\angle FHG=\frac{GF}{FH}=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos\angle FHG=\frac{4}{5}$，

即平面 EBF 与平面 EBG 夹角的余弦值为$\frac{4}{5}$.



25. (1)【证明】由 $BC=1, AB=\sqrt{3}, AC=2$ 可得,

$AC^2=AB^2+BC^2$,所以 $AB\perp BC$.

又 $PA\perp$底面 $ABCD$, $BC\subset$底面 $ABCD$,

所以 $BC\perp PA$.

又 $AB\cap PA=A$, AB, $PA\subset$平面 PAB,

提示:要着力寻找平面内的两条相交直线

所以 $BC\perp$平面 PAB.

因为 $PA\perp$底面 $ABCD$, $AD\subset$底面 $ABCD$,

所以 $AD\perp PA$.

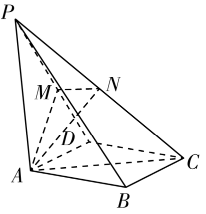
又 $AD\perp PB$,且 $PB\cap PA=P$, PB, $PA\subset$平面 PAB,

所以 $AD\perp$平面 PAB,所以 $AD//BC$.

提示:垂直于同一个平面的两直线平行

又 $BC\subset$平面 PBC, $AD\not\subset$平面 PBC,所以 $AD//$平面 PBC.

(2)【解】如图,作 $AM\perp PD$ 于点 M, $MN\perp PC$ 于点 N,连接 AN.



因为 $PA\perp$平面 $ABCD$, $DC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp DC$.

又 $AD\perp DC$, $PA\cap AD=A$, PA, $AD\subset$平面 PAD,所以 $DC\perp$平面 PAD.

因为 $AM\subset$平面 PAD,所以 $DC\perp AM$. 又 $AM\perp PD$, $DC\cap PD=D$, DC, $PD\subset$平面 PCD,所以 $AM\perp$平面 PCD.

又 $PC\subset$平面 PCD,所以 $AM\perp PC$. 又 $MN\perp PC$, $MN\cap AM=M$, MN, $AM\subset$平面 AMN,所以 $PC\perp$平面 AMN. 又 $AN\subset$平面 AMN,所以 $PC\perp AN$. 所以 $\angle MNA$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角,所以$\sin\angle MNA=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

因为 $PA=AC=2$,所以 N 为 PC 的中点且

$AN=\sqrt{2}$.

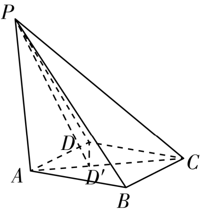
在 Rt△AMN 中，$AM=AN\cdot\sin\angle MNA=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{42}}{7}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

在 Rt△APM 中，$\sin\angle APM=\frac{AM}{AP}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{7}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以 $\cos\angle APM=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以 $\tan\angle APM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $AD=PA\cdot\tan\angle APM=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

一题多解 如图，作 $DD'\perp AC$ 于点 D'，连接 PD'，因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$DC, DD'\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp DC$，$PA\perp DD'$. 又 $PA\cap AC=A$ 且 PA，$AC\subset$ 平面 PAC，所以 $DD'\perp$ 平面 PAC，所以△PCD 在平面 PAC 上的投影为△PCD'. 设△PCD 的面积为 S_1，△PCD'的面积为 S_2，由二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$可得，$\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{7}$.



设 $\angle DAC=\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，则有 $AD=2\cos\theta, CD=2\sin\theta, CD'=2\sin^2\theta$.

又 $AD\perp DC, AD\cap PA=A, AD, PA\subset$ 平面 PAD，所以 $DC\perp$ 平面 PAD. 因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $DC\perp PD$. 因此 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+4\cos^2\theta}\cdot 2\sin\theta$，又 $S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin^2\theta$，代入 $\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{7}$，解得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，则 $\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，故 $AD=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

26. (1)【证明】因为在△ABD 和△CBD 中，$AD=DC$，$\angle ADB=\angle CDB$，$DB=DB$，

所以△$ABD\cong$△CBD，所以 $AB=CB$.

又因为 E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$.

因为 $AD=DC$，E 为 AC 的中点，所以 $DE\perp AC$.

又 $BE\cap DE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 BED.

又因为 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

(2)【解】因为 E 为 AC 的中点，所以点 C 到平面 ABD 的距离等于点 E 到平面 ABD 的距离的 2 倍.

由(1)得 $AB=CB$，又 $\angle ACB=60°$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 因为 $AB=BD=2$，所以 $AB=CB=AC=2$，$BE=\sqrt{3}$. 因为 $AD\perp DC$，$AD=DC$，所以 $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形，所以 $AD=CD=\sqrt{2}$，$DE=1$. 因为 $DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$，

因为 $DE\perp AC$，$DE\perp BE$，$AC\cap BE=E$，AC，$BE\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

因为 $V_{D-AEB}=V_{E-ADB}$，所以 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE\times BE\times DE=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABD}\times\frac{d}{2}$，其中 d 为点 C 到平面 ABD 的距离.

在 $\triangle ABD$ 中，$AB=BD=2$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

所以 $d=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

连接 EF，因为 $AC\perp$ 平面 BED，$EF\subset$ 平面 BED，所以 $AC\perp EF$. 又 AC 的值为定值，所以当 EF 的长最小时，$\triangle AFC$ 的面积最小，在 $\triangle BED$ 中，设 h 为 $\triangle BED$ 的边 BD 的高，则由等面积可得 $\frac{1}{2}\times2\times h=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}$，即 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 EF 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $CF=\sqrt{EF^2+EC^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

记 CF 与平面 ABD 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{d}{CF}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

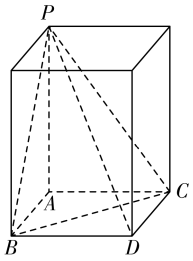
素养上分

1. C 【解析】如图，因为 $PA\perp$ 平面 ABC，AB，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$.

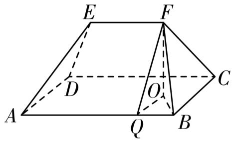
又 $\angle BAC=90°$，所以 PA，AB，AC 两两垂直，所以所求“鞠”的体积即为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积，也就是分别以 AC，AB，PA 为长、宽、高的长方体的外接球的体积，则该球的直径为长方体的体对角

线 PD 的长.

因为 $PA=2\sqrt{2}$, $AB=AC=2$, 所以 $PD=\sqrt{PA^2+AB^2+AC^2}=4$, 所以该球的半径为 2, 体积为 $\frac{4\pi}{3}\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$. **故选 C.**



2. 1 120 m^3　【解析】如图,



已知 $AB=24$, $BC=12$, $EF=8$,

过点 F 作 $FQ\perp AB$ 于点 Q, 过点 F 作 $FO\perp$ 平面 $ABCD$, 垂足为 O, 连接 OQ, OB, 因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $FO\perp AB$,

又因为 $FQ\perp AB$, $FO\perp AB$, $FO\cap FQ=F$, $FO,FQ\subset$ 平面 FOQ, 所以 $AB\perp$ 平面 FOQ, 又 $OQ\subset$ 平面 FOQ, 所以 $OQ\perp AB$.

因为四条侧棱长度相等, 所以 $BQ=\frac{24-8}{2}=8$, $OQ=\frac{1}{2}BC=6$,

又侧棱与底面所成角均为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $FO=OB=\sqrt{OQ^2+QB^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$, 即该刍甍的高为 10 m,

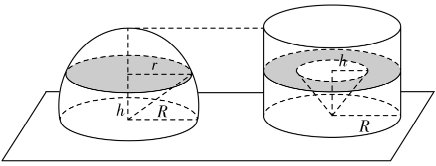
所以其体积 $V=\frac{1}{6}\times(2\times 24+8)\times 12\times 10=1\ 120(m^3)$.

3. 66π　【解析】因为半球台下底面半径 $R=5$, 上底面半径 $r=4$,

所以半球台高度 $h=\sqrt{R^2-r^2}=3$.

由祖暅原理得, 半球台的体积等于底面半径为 R、高为 h 的圆柱的体积减去底面半径为 h、高为 h 的圆锥的体积,

所以半球台的体积 $V=\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h=75\pi-9\pi=66\pi$.



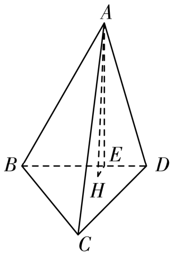
4. **思路导引** (1)①根据三面角余弦定理的定义,代入计算即可;②作出二面角 $A-BD-C$ 的平面角,根据边角关系求得三棱锥 $A-BCD$ 的高为 $\sqrt{2}$,再利用三棱锥的体积公式结合基本不等式计算可得最值;

(2)根据定义作出二面角 $A-OB-C$ 的平面角 θ,利用勾股定理及余弦定理分别列出边角关系的等式,变形计算即可得证.

(1)【解】①由三面角余弦定理得 $\cos 45°=\cos 45°\cos 60°+\sin 45°\sin 60°\cdot\cos\theta_1$,

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1$,解得 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

②如图①,过点 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD,垂足为 H,过点 H 作 $HE\perp BD$ 于点 E,连接 AE.



图①

因为 $BD\subset$ 平面 BCD,所以 $AH\perp BD$,

又 $HE\cap AH=H$,HE,$AH\subset$ 平面 AEH,所以 $BD\perp$ 平面 AEH,

又 $AE\subset$ 平面 AEH,所以 $BD\perp AE$,

所以 $\angle AEH$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角,即 $\angle AEH=\theta_1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$AE=AB\times\sin 60°=\sqrt{3}$,

由①得 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $AH=AE\times\sin\theta_1=AE\times\sqrt{1-\cos^2\theta_1}=\sqrt{2}$,

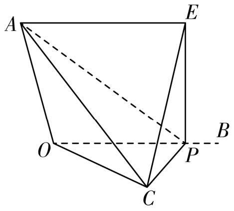
所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BC\times BD\times\sin 45°\times\sqrt{2}=\frac{1}{6}BC\times BD\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{BC+BD}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$,

当且仅当 $BC=BD=\frac{3}{2}$ 时等号成立,此时三棱锥 $A-BCD$ 的体积取得最大值 $\frac{3}{8}$.

(2)【证明】如图②,过点 C 作 $CP\perp OB$ 于点 P,过点 P 在平面 OAB 内作 OB 的垂

线，过点 A 作 OB 的平行线，交垂线于点 E，

连接 AP，AC，CE，则 $\angle CPE$ 是二面角 $A-OP-C$ 的平面角 θ，



图②

则 $PE\perp AE$，$CP\perp AE$，

又 PE，$CP\subset$ 平面 CEP，$PE\cap CP=P$，

所以 $AE\perp$ 平面 CEP，

又 $CE\subset$ 平面 CEP，所以 $AE\perp CE$.

在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cos\gamma$，

在 $\triangle CEP$ 中，由余弦定理得 $CE^2=CP^2+PE^2-2CP\cdot PE\cos\theta$，

两式相减得 $AC^2-CE^2=AE^2=OA^2+OC^2-CP^2-PE^2+2CP\cdot PE\cos\theta-2OA\cdot OC\cos\gamma$，

由勾股定理可得 $AE^2+PE^2=AP^2$，$OC^2-CP^2=OP^2$，

则 $AP^2=OA^2+OP^2+2CP\cdot PE\cos\theta-2OA\cdot OC\cos\gamma$，

即 $2OA\cdot OC\cos\gamma=OA^2+OP^2-AP^2+2CP\cdot PE\cos\theta$，

因为在 $\triangle AOP$ 中，由余弦定理得 $OA^2+OP^2-AP^2=2OA\cdot OP\cos\alpha$，

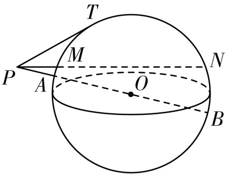
即 $2OA\cdot OC\cos\gamma=2OA\cdot OP\cos\alpha+2CP\cdot PE\cos\theta$，

两边同时除以 $2OA\cdot OC$，得 $\cos\gamma=\dfrac{OP}{OC}\cos\alpha+\dfrac{CP}{OC}\times\dfrac{PE}{OA}\times\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\theta$，

从而得证.

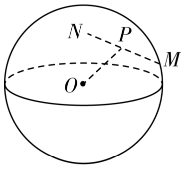
5. $\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$ 【解析】如图①，任取一点 P 在球 O 外，过点 P 作球的切线 PT，切点为 T，作球的割线 PMN，PAB，

由圆中切割线定理可得 $PM\cdot PN$ 为定值，且定值为 $PT^2=PA\cdot PB=PO^2-R^2$（其中 R 为球 O 的半径）.



图①

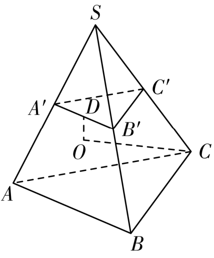
如图②,任取一点 P 在球 O 的内部,MN 为过点 P 的动弦,由圆中相交弦定理可得 $PM \cdot PN = R^2 - PO^2$(其中 R 为球 O 的半径).



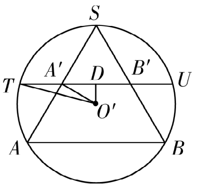
图②

在上述两种情况中,我们把 $|OP^2-R^2|$ 定义为点 P 关于球 O 的幂,记为 $M_P(O)$.

设正三棱锥的侧棱长为 l,球 O 的半径为 R,



图③



图④

如图③,由题意得,点 D 在球 O 的内部,而点 C 在球 O 的外部,

故 $M_D(O) = R^2 - OD^2$, $M_C(O) = OC^2 - R^2 = CC' \cdot CS = \frac{1}{2}l^2$,

又 D 为 $A'B'$ 的中点,设射线 $B'A'$ 与球 O 的球面的交点为 T,射线 $A'B'$ 与球 O 的球面的交点为 U,作出侧面 SAB 的截面如图④,

则 $R^2 - OD^2 = TD^2$,设 $\triangle SAB$ 的外接圆为圆 O',连接 $O'T$, $O'A$, $O'D$,则 $AA' \cdot A'S = A'T \cdot A'U = O'T^2 - O'A'^2 = TD^2 - 1 = \frac{1}{4}l^2$,

故 $R^2 - OD^2 = 1 + \frac{1}{4}l^2$,又 $OC^2 - OD^2 = AB^2$,

故 $16 = 1 + \frac{3}{4}l^2$,即 $l^2 = 20$, $l = 2\sqrt{5}$,

故正三棱锥的高为 $\sqrt{20 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{44}{3}}$,故体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 \times \sqrt{\frac{44}{3}} = \frac{8\sqrt{11}}{3}$.

第八章 全章上分

1. A 【解析】因为直线 $n//$平面 β，若 $\alpha//\beta$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，所以存在 $n_1\subset\alpha$，使得 $n//n_1$，

因为直线 $l\perp$ 平面 α，$n_1\subset\alpha$，所以 $l\perp n_1$，

又因为 $n//n_1$，所以 $l\perp n$；

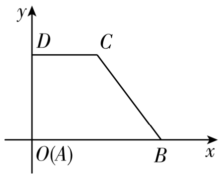
若直线 $l\perp$ 平面 α，$l\perp n$，则 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，

若直线 $n//$平面 β，则不足以说明 $\alpha//\beta$，

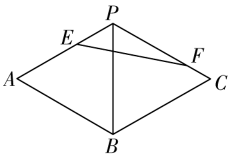
比如让 n 和 α 与 β 的交线平行（假设 α，β 相交）且 n 不在 α，β 平面内，此时满足直线 $n//$平面 β，$n//$平面 α，但不满足 $\alpha//\beta$.

所以“$\alpha//\beta$”是“$l\perp n$”的充分不必要条件. **故选 A.**

2. D 【解析】由题可知 $A'D'=\sqrt{2}$，将直观图还原为原图形如图所示，则 $AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 的周长为 $2+4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. **故 D 正确.**



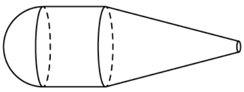
3. C 【解析】根据题意作出图形，如图所示，



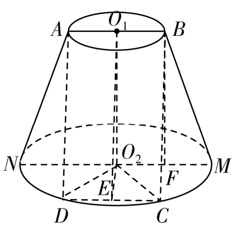
因为在底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，四条侧棱相等，且 $PA=AB$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 是正四棱锥且所有的棱都相等，当沿 PA，PC 剪开展成平面时，线段 EF 最短，在 $\triangle PEF$ 中，$PE=3$，$PF=6$，$\angle EPF=120^\circ$，由余弦定理得 $EF^2=PE^2+PF^2-2PE\cdot PF\cdot\cos\angle EPF=9+36-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$，解得 $EF=3\sqrt{7}$，所以蚂蚁爬行的最短距离为 $3\sqrt{7}$. **故 C 正确.**

4. A 【解析】根据题意，该组合体的直观

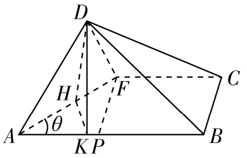
图如图所示，因为半球的半径为 9. 5 m，圆柱的底面半径为 9. 5 m，母线长为 14 m，圆台的两底面半径分别为 9. 5 m 和 1 m，高为 31. 5 m，所以 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times9.5^3=\frac{2\pi}{3}\times9.5^3\approx\frac{1\ 714\pi}{3}(\mathrm{m}^3)$，$V_{圆柱}=\pi\times9.5^2\times14\approx1\ 260\pi(\mathrm{m}^3)$，$V_{圆台}=\frac{\pi}{3}\times(9.5^2+1^2+9.5\times1)\times31.5=\frac{\pi}{3}\times31.5\times(9.5^2+10.5)\approx\frac{3\ 166}{3}\pi(\mathrm{m}^3)$，所以浮空艇的体积 $V=V_{半球}+V_{圆柱}+V_{圆台}=\frac{1\ 714\pi}{3}+1\ 260\pi+\frac{3\ 166}{3}\pi\approx9\ 064(\mathrm{m}^3)$，**故 A 正确.**



5. D 【解析】如图，因为矩形 $ABCD$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$，且 $AB=2$，所以 $AD=2\sqrt{3}$. 取 CD 的中点 E，连接 O_1E，O_2E，则 $O_1E=2\sqrt{3}$. 设圆台的下底面圆的半径为 R，因为 $\angle CO_2D=60°$，所以 $\triangle CO_2D$ 为等边三角形. 因为 $R=CD=AB=2$，且 E 为 CD 的中点，所以 $O_2E=\sqrt{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2E$ 中，可得 $O_1O_2=\sqrt{O_1E^2-O_2E^2}=3$，取 O_2M 的中点 F，连接 BF，可得 $BF/\!/O_1O_2$ 且 $BF=O_1O_2=3$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BMF$ 中，$BF=3$，$MF=1$，可得 $BM=\sqrt{BF^2+MF^2}=\sqrt{10}$，所以该圆台的侧面积 $S=\pi(R+1)\times BM=3\sqrt{10}\pi$. **故 D 正确.**



6. C 【解析】如图，在平面 ADF 内过点 D 作 $DH\perp AF$，垂足为 H，连接 HK. 过点 F 作 $FP/\!/BC$，交 AB 于点 P.



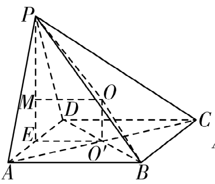
设 $\angle FAB=\theta$，在原矩形 $ABCD$ 中，连接 AE,AC（图略），可得 $AE=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，所以 $\cos\theta\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

设 $DF=x$，则 $1<x<2$. 因为平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，$DK\perp AB$，$DK\subset$ 平面 ABD，所以 $DK\perp$ 平面 ABC. 又 $AF\subset$ 平面 ABC，所以 $DK\perp AF$. 又因为 $DH\perp AF$，$DK\cap DH=D$，$DK,DH\subset$ 平面 DKH，所以 $AF\perp$ 平面 DKH，又 $HK\subset$ 平面 DKH，所以 $AF\perp HK$，即 $AH\perp HK$. 在 Rt$\triangle ADF$ 中，$AF=\sqrt{1+x^2}$，$DH=\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$. 因为 $\triangle ADF$ 和 $\triangle APF$ 都是直角三角形，$PF=AD$，所以 Rt$\triangle ADF\cong$ Rt$\triangle FPA$，$AP=DF=x$. 因为 $\triangle AHD\backsim\triangle ADF$，所以 $\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{DH}{DF}$，$\dfrac{AH}{1}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}}{x}$，$AH=\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$，所以 $\cos\theta=\dfrac{AH}{AK}=\dfrac{AP}{AF}$，$\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}}{t}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，得 $x=\dfrac{1}{t}$. 因为 $1<x<2$，所以 $1<\dfrac{1}{t}<2$，所以 $\dfrac{1}{2}<t<1$. **故 C 正确.**

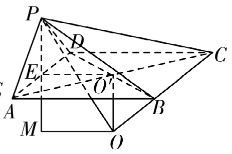
名师点拨 由线面垂直证明面面垂直，需要“经过一个平面的垂线”；由面面垂直证明线面垂直，则需要“一个平面内有一条直线垂直于交线”，在解答问题的过程中，要注意使用正确的符号语言.

7. C 【解析】取 AD 的中点 E，连接 PE. 因为 $PA=PD$，所以 $PE\perp AD$. 又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且交线为 AD，$PE\subset$ 平面 PAD，所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. 连接 BD，AC 交于点 O'，则 $ABCD$ 的中心为 O'，设

球心为 O，连接 OO'，则 $OO'\perp$ 平面 $ABCD$，于是 $O'B=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=2$，$OO'//PE$. 设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球半径为 R，其表面积为 $4\pi R^2=20\pi$，故 $R=\sqrt{5}$. 连接 $O'E$，过点 O 作 $OM//O'E$，则四边形 $OO'EM$ 为矩形，故 $O'O=ME$，$OM=O'E=\frac{1}{2}AB=1$. 连接 OB，OP，在 Rt△$OO'B$ 和 Rt△OMP 中，$R^2=O'O^2+O'B^2=(\sqrt{5})^2=PM^2+OM^2$，$O'B=2$，$OM=1$，所以 $O'O=1$，$PM=2$，$ME=OO'=1$. 当点 O 在平面 $ABCD$ 的上方时，如图①，此时四棱锥的高 $PE=PM+ME=3$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{3}\times3=4\sqrt{3}$. 当点 O 在平面 $ABCD$ 的下方时，如图②，连接 ME，此时四棱锥的高为 $PE=PM-ME=1$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times2\times2\sqrt{3}\times1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **故 C 正确.**



图①



图②

8. B 【解析】如图，取 PB 的中点 N，PM 的中点 G，连接 AG，NG，AN，则 $NG//BM$，

$\because DB=\frac{1}{4}PB$，$\therefore D$ 是 NB 的中点，

又 $\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore DE//AN$，

$\therefore \angle ANG$ 为异面直线 DE 与 BM 所成的角或其补角，

易知 $PA\perp PN$，$PA\perp PG$，

$\because PN=\frac{1}{2}PB=2$，$PG=1$，

$\therefore$ 在 Rt△PAN 中，$AN=\sqrt{PA^2+PN^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

在 Rt△PAG 中，$AG=\sqrt{PA^2+PG^2}=$

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

在$\triangle BPC$中，由余弦定理得

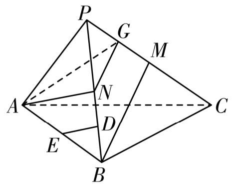
$\cos\angle BPC=\dfrac{PB^2+PC^2-BC^2}{2PB\cdot PC}=\dfrac{4^2+4^2-2^2}{2\times4\times4}=\dfrac{7}{8}$，

在$\triangle NPG$中，由余弦定理得$NG=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\dfrac{7}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$ 在$\triangle ANG$中，由余弦定理得

$\cos\angle ANG=\dfrac{AN^2+NG^2-AG^2}{2\cdot AN\cdot NG}=\dfrac{(\sqrt{13})^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-(\sqrt{10})^2}{2\times\sqrt{13}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{78}}{52}$，

$\therefore$ 异面直线DE与BM所成角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{78}}{52}$. **故 B 正确.**



9. ABC 【解析】对于 A，因为在$\triangle BEF$中，高为点B到直线EF的距离，即BB_1的长度，为定值，底边EF的长度也为定值，所以$\triangle BEF$的面积为定值，**故 A 正确；**

对于 B，因为线段EF在B_1D_1上，$B_1D_1\parallel BD$，$BD\perp AC$，所以$B_1D_1\perp AC$，即$EF\perp AC$，**故 B 正确；**

对于 C，连接AB_1，AD_1（图略），点A到直线EF的距离等于A到直线D_1B_1的距离，由于$\triangle AD_1B_1$为边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，

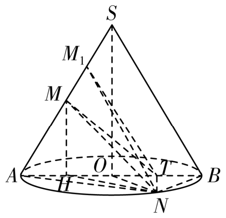
故点A到直线D_1B_1的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，因此点$A$到直线$EF$的距离为定值$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，**故 C 正确；**

对于 D，易知在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$D_1D\perp$平面$ABCD$，又$D_1D\subset$平面D_1DBB_1，所以平面$D_1DBB_1\perp$平面

$ABCD$，即平面 $DEB\perp$ 平面 BCD，故二面角 $E-BD-C$ 的大小为 $90°$，**故 D 错误. 故选 ABC.**

10. BCD 【解析】如图，对于 A，设圆锥的底面半径为 R，高为 h，则 $R=\frac{1}{2}AB=6$，由题意知，圆锥的母线长为 12，故 $h=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，故圆锥体积 $V=\frac{1}{3}\times\pi R^2\times h=\frac{1}{3}\times\pi\times36\times6\sqrt{3}=72\sqrt{3}\pi$，**A 错误；**

对于 B，当 M 为 SA 中点时，设 M 在底面上的射影为 H，连接 MH，NH，则 H 为 OA 的中点，则 HN 为线段 MN 在底面的射影，$OH=3$，而 $\angle NOH=120°$，$ON=6$，在 $\triangle OHN$ 中，$HN^2=OH^2+ON^2-2OH\cdot ON\cdot\cos120°=9+36-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$，即 $HN=3\sqrt{7}$，即线段 MN 在圆锥底面上的射影长为 $3\sqrt{7}$，**B 正确；**

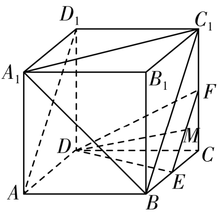


对于 C，过点 N 作 $NT\perp AB$ 交 AB 于点 T，作 $TM_1\perp SA$ 交 SA 于点 M_1，连接 M_1N，BN，AN，MT，由于 $SO\perp$ 平面 ABN，$SO\subset$ 平面 SAB，所以平面 $SAB\perp$ 底面 ABN，因为平面 $SAB\cap$ 底面 $ABN=AB$，$NT\subset$ 平面 ABN，$NT\perp AB$，所以 $NT\perp$ 平面 SAB. 又 $SA\subset$ 平面 SAB，所以 $NT\perp SA$. 又 $TM_1\perp SA$，$TM_1\cap NT=T$，TM_1，$NT\subset$ 平面 NTM_1，所以 $SA\perp$ 平面 NTM_1，又 $M_1N\subset$ 平面 NTM_1，所以 $SA\perp M_1N$，故当点 M 与 M_1 重合时，$MN\perp SA$，**C 正确；**

对于 D，由 C 的分析知，$NT\perp$ 平面 SAB，因为 $MT\subset$ 平面 SAB，所以 $NT\perp MT$，直线 MN 与平面 SAB 所成角为 $\angle NMT$，易知 $\triangle OBN$ 为等边三角形，$NT=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

则 $\tan\angle NMT=\dfrac{NT}{MT}=\dfrac{3\sqrt{3}}{MT}$，当 MT 最小，即 $MT=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 12=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ 时，所求角的正切值最大，最大值为 $\dfrac{2}{3}$，D **正确. 故选** BCD.

11. ABD 【**解析**】对于 A，如图，连接 BC_1，C_1A_1，则 $BC_1=A_1B=A_1C_1$，即 $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形，又 E,F 分别为 BC,CC_1 的中点，故 $EF/\!/BC_1$，故直线 A_1B 与 EF 所成的角即为 $\angle A_1BC_1$ 或其补角，而 $\angle A_1BC_1=60°$，故直线 A_1B 与 EF 所成的角的大小为 $60°$，**故 A 正确**；



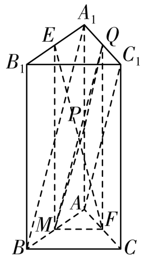
对于 B，因为 $AB/\!/D_1C_1$，$AB=D_1C_1$，所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，所以 $AD_1/\!/BC_1$，而 $EF/\!/BC_1$，所以 $EF/\!/AD_1$，又 $AD_1\not\subset$ 平面 DEF，$EF\subset$ 平面 DEF，所以 $AD_1/\!/$平面 DEF，**故 B 正确**；

对于 C，取 EF 的中点为 M，连接 DM，显然 $DE=DF$，故 $DM\perp EF$，假设平面 $DEF\perp$ 平面 BCC_1B_1，而平面 $DEF\cap$ 平面 $BCC_1B_1=EF$，$DM\subset$ 平面 DEF，则 $DM\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $DC\perp$ 平面 BCC_1B_1，则 $DM/\!/DC$，而 $DM\cap DC=D$，故矛盾，**故 C 错误**；

对于 D，不妨设正方体棱长为 2，点 C 到平面 DEF 的距离为 d，则 $V_{D-CEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle CFF}\cdot CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1^2\times 2=\dfrac{1}{3}$，而 $DE=DF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，$DM=\sqrt{5-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $V_{C-DEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times d=V_{D-CEF}=\dfrac{1}{3}$，解得 $d=\dfrac{2}{3}$，设直线 CD 与平面 DEF 所成角为 θ，$0°\leqslant\theta\leqslant 90°$，则 $\sin\theta=\dfrac{d}{DC}=\dfrac{\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$，**故**

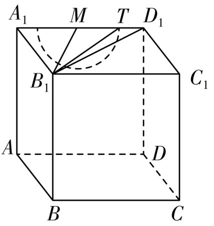
D 正确.

12. $\frac{\sqrt{17}}{17}$　$\frac{7}{10}$　【解析】如图,取 AB 的中点 M,连接 EM,FM. 由题意可知,$EM\perp$平面 ABC,所以$\angle EFM$ 为直线 EF 与平面 ABC 所成角,在 $Rt\triangle EFM$ 中,$\tan\angle EFM=\frac{EM}{MF}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$,所以 $\cos\angle EFM=\frac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$. 取 AA_1,A_1C_1 的中点分别为 P,Q,连接 MP,QP,QF,MQ,可得 $PM/\!/A_1B$,$PQ/\!/AC_1$,所以异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为$|\cos\angle MPQ|$. 在$\triangle MPQ$ 中,$PM=\frac{1}{2}A_1B=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AA_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$PQ=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$MQ=\sqrt{MF^2+QF^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$,由余弦定理可得 $\cos\angle MPQ=\frac{PM^2+PQ^2-MQ^2}{2PM\cdot PQ}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-\frac{17}{4}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{7}{10}$,所以异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值为$\frac{7}{10}$.



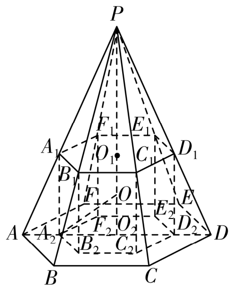
13. $4\sqrt{3}$　【解析】如图,由题意得$\angle B_1A_1D_1=60°$,连接 B_1D_1. 因为直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均相等,所以$\triangle A_1B_1D_1$ 为等边三角形,取 A_1D_1 的中点 M,连接 B_1M,则 $B_1M\perp A_1D_1$. 又 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$B_1M\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $AA_1\perp B_1M$,因为 $A_1D_1\cap AA_1=A_1$,A_1D_1,$AA_1\subset$平面 A_1D_1DA,所以 $B_1M\perp$平面 A_1D_1DA. 设直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2m$,则 $A_1M=m$,由勾股定理得 $B_1M=\sqrt{(2m)^2-m^2}=\sqrt{3}m$,以 M 为圆心,

r 为半径作圆，以 B_1 为球心，$\frac{\sqrt{13}}{2}$为半径的球面与侧面 ADD_1A_1 的交线长为半圆，故 $r\leqslant m$，$\pi r=\frac{1}{2}\pi$，解得 $r=\frac{1}{2}$，设半圆上一点为 T，连接 B_1T，则 $B_1T=\frac{\sqrt{13}}{2}$，此时 $B_1M^2+r^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$，即 $3m^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$，解得 $m=1$，由于 $r=\frac{1}{2}<1$，故符合题意. 此时 $B_1M=\sqrt{3}$，该四棱柱的棱长为 2，故该四棱柱的体积为 $A_1A\cdot A_1D_1\cdot B_1M=2^2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



14. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ 【解析】如图，依题意画出示意图，设正六棱柱为 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1-A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，其中上底面 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的中心为 O_1，其外接球球心为 O，下底面 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的中心为 O_2，连接 OA_2. 因为 $PO_2=2\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}AO_2$，$AP=\sqrt{13}$. 所以在 $\triangle APO_2$ 中，$AP=\sqrt{AO_2^2+PO_2^2}=\sqrt{AO_2^2+12AO_2^2}=\sqrt{13}AO_2=\sqrt{13}$，所以 $AO_2=1$，$PO_2=2\sqrt{3}$. 设 $A_2O_2=x$，$AA_2=1-x$，因为 $\tan\angle PAO_2=\frac{PO_2}{AO_2}=2\sqrt{3}$，所以 $A_1A_2=2\sqrt{3}AA_2=2\sqrt{3}(1-x)$，所以 $OO_2=\frac{1}{2}A_1A_2=\sqrt{3}(1-x)$. 设正六棱柱的外接球半径为 R，在 $\triangle A_2OO_2$ 中，$A_2O^2=A_2O_2^2+OO_2^2$，所以 $R^2=x^2+[\sqrt{3}(1-x)]^2=x^2+3(1-2x+x^2)=4x^2-6x+3=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$，当且仅当 $x=\frac{3}{4}$时，R^2 取得最小值，最小值为$\frac{3}{4}$，此时球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所

以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.



15. (1)【证明】由题可知 $PA\perp PE$, $PE=DE=1$, $BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=\sqrt{5}$. 因为 $AP=AB$, $\angle PAB=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle PAB$ 为等边三角形, 所以 $PB=2$, 所以 $PB^2+PE^2=5=BE^2$, 所以 $PB\perp PE$. 因为 $PB\cap PA=P$, $PB\subset$ 平面 PAB, $PA\subset$ 平面 PAB, 所以 $PE\perp$ 平面 PAB. 又 $PE\subset$ 平面 PBE, 所以平面 $PBE\perp$ 平面 PAB.

(2)【解】由(1)得 $PE\perp$ 平面 PAB, 所以 $V_{P-ABE}=V_{E-PAB}$, 由三角形面积公式得 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PA\times PB\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, 故 $V_{P-ABE}=V_{E-PAB}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAB}\times PE=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 由(1)得 $PE\perp PB$, $PE\perp PA$, $PA=PB=2$, 所以 $S_{\triangle PAE}=S_{\triangle PBE}=\frac{1}{2}PB\times PE=\frac{1}{2}\times2\times1=1$, $S_{\triangle EAB}=2$, 故三棱锥 $P-ABE$ 的表面积 $S=S_{\triangle PAE}+S_{\triangle PEB}+S_{\triangle EAB}+S_{\triangle PAB}=1+1+2+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}$.

16. **思路导引** (1)由余弦定理和勾股定理及逆定理得到 $BD\perp BC$, $\triangle BCD$ 为直角三角形, 由题目条件得到 $BD\perp$ 平面 BCF, $BD\perp BF$, $\triangle BDF$ 为直角三角形, 结合 $\triangle CDF$, $\triangle BCF$ 为直角三角形, 得到结论;(2)由等体积法进行求解, 得到点 C 到平面 BDF 的距离.

(1)【证明】在四边形 $ABCD$ 中, $AB/\!/CD$, $AB\perp AD$, $AB=AD=2$, $CD=4$,

由勾股定理得 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=2\sqrt{2}$, 且 $\angle ADB=\frac{\pi}{4}$,

故 $\angle CDB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $BC^2=BD^2+$

$CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle CDB=8+16-2\times 2\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$,

故 $BD^2+BC^2=CD^2$,则 $BD\perp BC$,$\triangle BCD$ 为直角三角形.

因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$,$FC/\!/EA$,所以 $FC\perp$平面 $ABCD$,

因为 $BD\subset$平面 $ABCD$,所以 $FC\perp BD$,

因为 $BC\cap FC=C$,BC,$FC\subset$平面 BCF,所以 $BD\perp$平面 BCF,

又因为 $BF\subset$平面 BCF,所以 $BD\perp BF$,

故$\triangle BDF$ 为直角三角形.

因为 $FC\perp$ 平面 $ABCD$,BC,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $FC\perp BC$,$FC\perp CD$,

所以$\triangle CDF$,$\triangle BCF$ 为直角三角形.

综上,四面体 $B-CFD$ 为鳖臑.

(2)【解】$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot BC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$,

因为 $FC\perp$ 平面 $ABCD$,且 $CF=4$,所以 $V_{F-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot CF=\frac{1}{3}\times4\times4=\frac{16}{3}$,

由(1)知 $BD\perp BF$,在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中,由勾股定理得 $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=2\sqrt{6}$,

所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BD\cdot BF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=4\sqrt{3}$,

设点 C 到平面 BDF 的距离为 d,又 $V_{C-BDF}=V_{F-BCD}=\frac{16}{3}$,

所以 $d=\frac{3V_{C-BDF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{3\times\frac{16}{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,点 C 到平面 BDF 的距离为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

17. (1)【证明】在正方形 $ABCD$ 中,因为 E,F 分别是 AB,CD 的中点,所以 $BE/\!/FD$,且 $BE=FD$,故四边形 $BEDF$ 为平行四边形,所以 $BF/\!/ED$. 又 $BF\not\subset$ 平面 ADE,$ED\subset$平面 ADE,所以 $BF/\!/$平面 ADE.

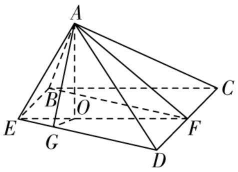
(2)【证明】当$\triangle ACD$ 为正三角形时,因为 F 是 CD 的中点,所以 $AF\perp CD$. 在正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,CD 的中

点，故 $EF\perp CD$. 又 $AF\cap EF=F$，$AF\subset$ 平面 AEF，$EF\subset$ 平面 AEF，故 $CD\perp$ 平面 AEF. 因为 $CD\subset$ 平面 $BCDE$，所以平面 $AEF\perp$ 平面 $BCDE$.

(3)【解】如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，过点 A 作 $AO\perp EF$ 交 EF 于点 O，过点 O 作 $OG\perp DE$ 交 DE 于点 G，连接 AG. 在正方形 $ABCD$ 中，令 $BC=a$，则 $AE=\frac{a}{2}$，$EF=a$. 因为 $\triangle ACD$ 为等边三角形，F 为 CD 的中点，所以 $AF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，从而 $AE^2+AF^2=EF^2$，即 $AE\perp AF$. 由(2)知，平面 $AEF\perp$ 平面 $BCDE$，平面 $AEF\cap$ 平面 $BCDE=EF$，$AO\perp EF$，$AO\subset$ 平面 AEF，故 $AO\perp$ 平面 $BCDE$，而 $DE\subset$ 平面 $BCDE$，从而 $AO\perp DE$. 又 $OG\perp DE$，$AO\cap OG=O$，$AO\subset$ 平面 AOG，$OG\subset$ 平面 AOG，

所以 $DE\perp$ 平面 AOG，而 $AG\subset$ 平面 AOG，故 $DE\perp AG$，所以 $\angle AGO$ 为二面角 $A-DE-C$ 的平面角. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EAF$ 中，$AO=\frac{AE\cdot AF}{EF}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，$OE=\frac{1}{2}AE=\frac{a}{4}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$EF\perp DF$，$DE=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，因为 $OG\perp DE$，所以 $\triangle EGO\backsim\triangle EFD$，所以 $\frac{OG}{DF}=\frac{OE}{DE}$，于是 $OG=\frac{OE\cdot DF}{DE}=\frac{\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{a}{4\sqrt{5}}$，从而在 $\mathrm{Rt}\triangle AOG$ 中，$AG=\sqrt{AO^2+OG^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{16}+\frac{a^2}{80}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$，

故 $\cos\angle AGO=\frac{OG}{AG}=\frac{\frac{a}{4\sqrt{5}}}{\frac{a}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{4}$. 因此二面角 $A-DE-C$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$.



18.【证明】(1)如图,取 BC 的中点为 K,连接 B_1K,NK. 因为 N 为 AC 的中点,所以 $KN//AB$, $KN=\frac{1}{2}AB$. 由三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 可得四边形 ABB_1A_1 为平行四边形,M 为 A_1B_1 的中点,所以 $B_1M=\frac{1}{2}AB$, $B_1M//AB$,所以 $B_1M=KN$, $B_1M//KN$,所以四边形 B_1MNK 是平行四边形,所以 $MN//B_1K$. 因为 $B_1K\subset$ 平面 BCC_1B_1, $MN\not\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $MN//$ 平面 BCC_1B_1.

(2)因为侧面 BCC_1B_1 为正方形,所以 $CB\perp BB_1$. 而 $CB\subset$ 平面 BCC_1B_1,平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1,平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=BB_1$,故 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1. 因为 $BM\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp BM$.

(3)如图,若选①,连接 $AC_1,BC_1,AC_1=3\sqrt{2}$.

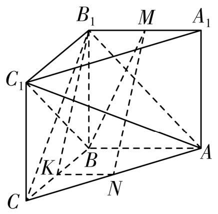
因为侧面 BCC_1B_1 为正方形,$AB=BC=2$,所以 $BC_1=\sqrt{C_1C^2+BC^2}=2\sqrt{2}$,则 $BC_1^2+AB^2=8+4=12\neq18=AC_1^2$,所以 AB 与 BC_1 不垂直.

假设 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1,因为 $BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $AB\perp BC_1$,矛盾,故①不能选.

若选②,由(1)知四边形 B_1MNK 是平行四边形,$MN//B_1K$ 且 $MN=B_1K$. 因为 $BM=MN$,所以 $BM=B_1K$. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BCC_1B_1 为正方形,$AB=BC=2$,BC 的中点为 K,M 为 A_1B_1 的中点,所以 $B_1M=BK=1$,则 $\triangle BB_1M\cong\triangle B_1BK$,所以 $\angle BB_1M=\angle B_1BK=90°$,故 $A_1B_1\perp BB_1$,所以 $AB\perp BB_1$. 因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1, $AB\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $CB\perp AB$. 因为 $CB\cap BB_1=B$, $CB,BB_1\subset$ 平面

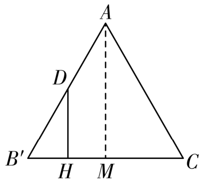
BCC_1B_1，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

若选③，连接 CB_1，AB_1，因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，所以三棱锥 $C-ABB_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABB_1}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BB_1\cdot\sin\angle ABB_1\cdot BC=\frac{4}{3}$. 因为 $AB=BB_1=BC=2$，所以 $\sin\angle ABB_1=1$，$\angle ABB_1=\frac{\pi}{2}$，$BB_1\perp AB$. 因为 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CB\perp AB$. 因为 $CB\cap BB_1=B$，CB，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.



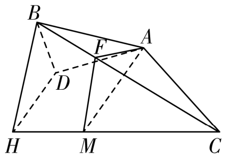
19.【解】（1）在线段 BC 上存在点 F，且 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$，使得 $AF//$平面 BDH. 理由如下：

取 $B'C$ 的中点 M，连接 AM，如图①所示.



图①

因为$\triangle AB'C$ 是等边三角形，$B'C$ 的中点为 M，所以 $AM\perp B'C$. 因为 $DH\perp B'C$，所以 $AM//DH$. 如图②所示，$AM//DH$，$AM\not\subset$ 平面 BDH，$DH\subset$ 平面 BDH，所以 $AM//$平面 BDH，且$\frac{HM}{MC}=\frac{1}{2}$. 在线段 BC 上取点 F 使$\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$，连接 MF，FA.

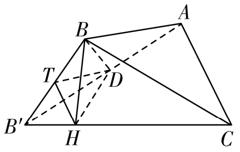


图②

因为$\frac{HM}{MC}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$，所以 $MF//BH$. 又因为 $BH\subset$ 平面 BDH，$MF\not\subset$ 平面 BDH，所以 $MF//$平面 BDH. 又因为 $MF\cap AM=M$，

$MF, AM \subset$ 平面 AMF，所以平面 $AMF /\!/$ 平面 BDH. 又因为 $AF \subset$ 平面 AMF，所以 $AF /\!/$ 平面 BDH. 所以存在点 F 满足题意，且 $\frac{BF}{FC}=\frac{1}{2}$.

(2) 如图③所示，AD 与 CH 的延长线交于点 B'，连接 BB'，取 BB' 的中点 T，连接 TH, TD.



图③

由折叠的性质可得 $BD=B'D, BH=B'H$，$B' \in$ 平面 ABD，$B' \in$ 平面 BCH. 因为 $DH \perp BH$，$DH \perp CH$，$BH \cap CH=H$，BH，$CH \subset$ 平面 BCH，所以 $DH \perp$ 平面 BCH. 又 $TH \subset$ 平面 BCH，所以 $DH \perp TH$. 因为 T 为 BB' 的中点，所以 $TH \perp BB'$，$DT \perp BB'$，所以 $\angle DTH$ 即为半平面 BHC 与半平面 BDA 所成的二面角的平面角.

由(1)可得 $DH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$B'H=BH=\frac{1}{2}$，$BD=B'D=1$. 因为半平面 BHC 与半平面 BDA 所成的二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle DTH=\frac{DH}{TH}=2\sqrt{2}$，所以 $TH=\frac{\sqrt{6}}{8}$，所以 $B'T=\sqrt{B'H^2-TH^2}=\frac{\sqrt{10}}{8}$，所以 $B'B=\frac{\sqrt{10}}{4}$. 设点 B 到直线 CH 的距离为 h，则 $S_{\triangle BHB'}=\frac{1}{2}\cdot BB'\cdot TH=\frac{1}{2}B'H\cdot h$，即 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}h$，解得 $h=\frac{\sqrt{15}}{8}$，即点 B 到直线 CH 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{8}$.